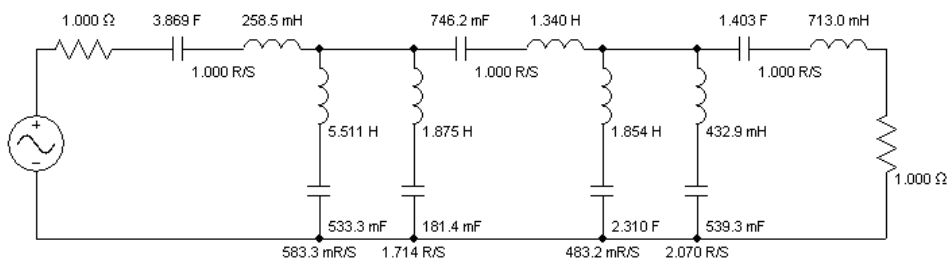
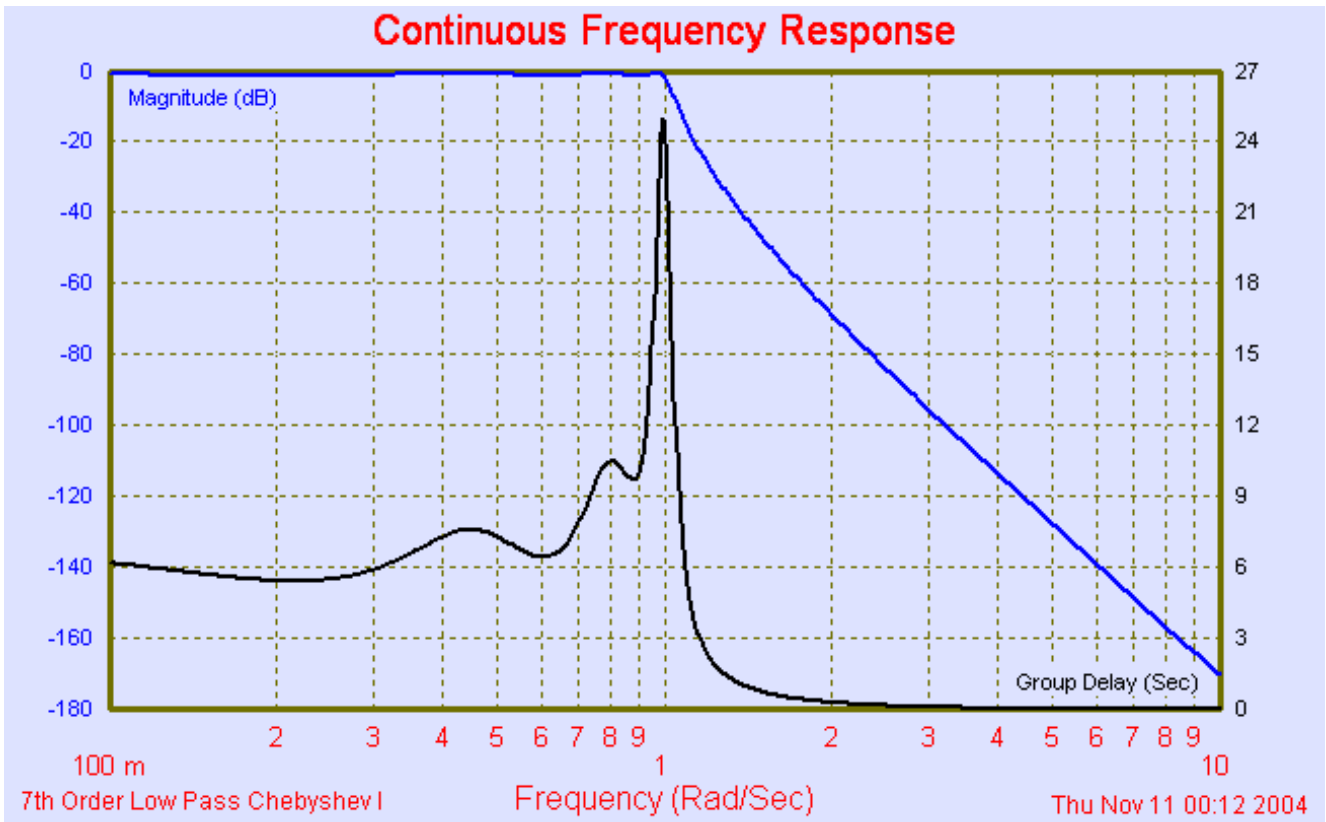
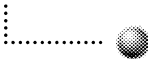


# Passive Filter



Berner Fachhochschule



Hochschule für Technik und Informatik HTI  
 Fachbereich Elektro- und Kommunikationstechnik

# Inhaltsverzeichnis

Passive Filter.....	1
1. Filter Jargon, Begriffe und Definitionen.....	1
2. Filter mit kritischer Dämpfung.....	11
3. Bessel-Filter.....	15
4. Gauss-Filter.....	18
5. Raised Cosine Filter.....	22
6. Butterworth.....	27
7. Chebyshev.....	36
8. Filtervergleich.....	45
9. Skalierung, Transformationen.....	47
9.1 Impedanz.....	47
9.2 Frequenz.....	47
9.3 Tiefpass - Hochpass-Transformation.....	48
9.4 Tiefpass - Bandpass-Transformation.....	49
9.5 Tiefpass - Bandstop-Transformation.....	51
10. Netzwerktransformationen (Norton-Transformationen).....	54
Zusammenstellung der Norton-Transformationen.....	60

# Passive Filter

## 1. Filter Jargon, Begriffe und Definitionen

In der Hochfrequenz- und Mikrowellentechnik werden zum Teil leicht andere Begriffe und Definitionen verwendet als in der Aktivfiltertechnik. Mit einer kurzen Einführung wird ein Überblick gegeben.

### Filteranwendungen

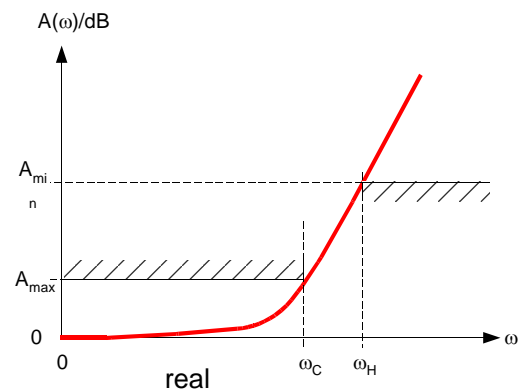
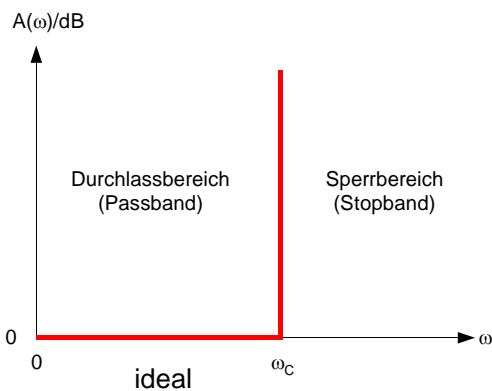
- Unterdrückung unerwünschter Frequenzen
- Ausfilterung erwünschter Frequenzen
- Trennung oder Summierung verschiedener Frequenzen
- Impulsformung
- Impedanzanpassung

### Filtertypen

- **Tiefpass TP** (Lowpass LP)

Ein idealer Tiefpass weist folgende Dämpfungsfunktion auf

$$A(\omega)/\text{dB} = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ \infty & \omega_c < \omega \leq \infty \end{cases}$$



Reale Filter haben keinen so idealen Übergang vom Durchlassbereich in den Sperrbereich.

Der Frequenzbereich von  $0 \leq \omega \leq \omega_c$  heisst **Durchlassbereich DB** (Passband)

Der Frequenzbereich von  $\omega_H \leq \omega \leq \infty$  heisst **Sperrbereich SB** (Stopband)

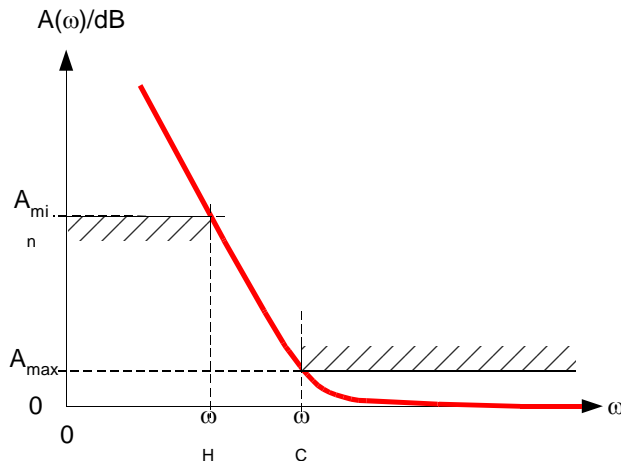
Der Frequenzbereich von  $\omega_c \leq \omega \leq \omega_H$  heisst **Übergangsbereich ÜB** (Transition)

$\omega_H$  ist eine für jede Applikation zu spezifizierende Frequenz oberhalb  $\omega_c$ .

- **Hochpass HP** (Highpass HP)

Ein idealer Hochpass weist folgende Dämpfungsfunktion auf

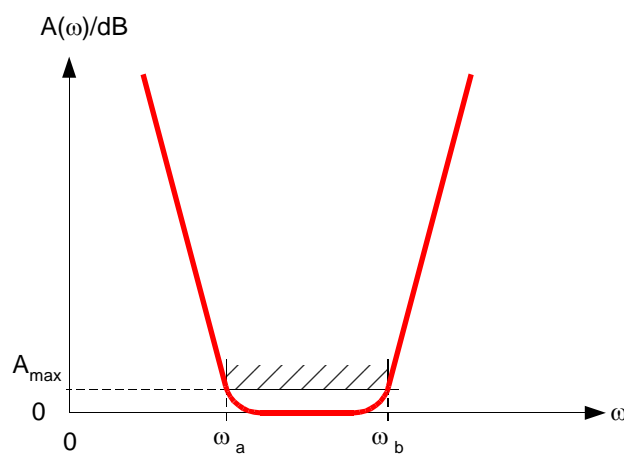
$$A(\omega)/\text{dB} = \begin{cases} \infty & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < \omega \leq \infty \end{cases}$$



- **Bandpass BP** (Bandpass BP)

Ein idealer Bandpass weist folgende Dämpfungsfunktion auf

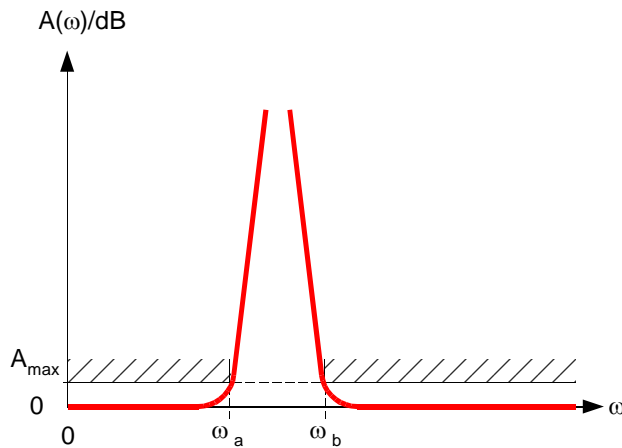
$$A(\omega)/\text{dB} = \begin{cases} \infty & 0 \leq \omega < \omega_a \\ 0 & \omega_a \leq \omega \leq \omega_b \\ \infty & \omega_b < \omega \leq \infty \end{cases}$$



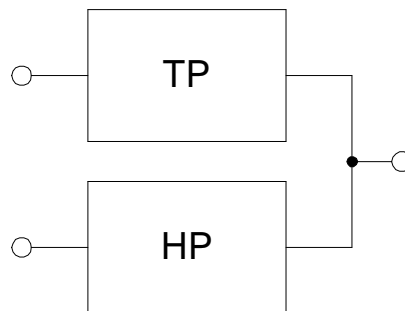
- **Bandsperr** (Bandstop BS)

Eine idealer Bandsperr weist folgende Dämpfungsfunktion auf

$$A(\omega)/\text{dB} = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega < \omega_a \\ \infty & \omega_a \leq \omega \leq \omega_b \\ 0 & \omega_b < \omega \leq \infty \end{cases}$$



- **Multiplexer** (Multiplexer) sind Filterkombinationen zum Zusammenschalten oder Auftrennen mehrerer Frequenzen oder Frequenzbänder, z.B.:



Diese Filterkombinationen werden hier nicht behandelt.

- **Allpassfilter** (Allpass) werden für Gruppenlaufzeitverzerrungen verwendet und haben einen konstanten Amplitudengang bei vorgegebener Gruppenlaufzeitcharakteristik.

Diese Filter werden hier nicht behandelt.

Für die Synthese von Filtern werden die gewünschten Filtertypen normalerweise in TP-Filter transformiert, als TP-Prototypfilter synthetisiert und anschliessend wieder in die Originalform mit gleichzeitiger Impedanz- und Frequenztransformation zurückgewandelt. Diese Methode erlaubt auch die Verwendung von Tabellen normierter Filterelemente (Filterkataloge).

### Approximationen, Filtercharakteristiken

Die Dämpfungs- oder Übertragungsfunktionen können mit verschiedenen Approximationen an die idealen Filtertypen angenähert werden.

In Hochfrequenzanwendungen werden hauptsächlich

- Kritische Dämpfung
- Butterworth
- Chebyshev

eingesetzt. Diese Filterapproximationen werden im Folgenden eingehender diskutiert.

In der Impulstechnik (digitale Modulationen) werden hauptsächlich

- Bessel
- Gauss
- Raised Cosine

eingesetzt. Diese Filterapproximationen werden ebenfalls diskutiert, da sie in digitalen Modulationen sehr häufig zur Anwendung gelangen. Als Hochfrequenzfilter im Spektralbereich werden diese Typen kaum eingesetzt.

Weitere Filterapproximationen für den Spektralbereich sind

- Invers Chebyshev
- Elliptische Filter, Cauer

Für diese Filter sei auf die Spezialliteratur verwiesen. Sie werden hier nicht diskutiert.

Die wichtigsten Eigenschaften der Filter für Hochfrequenzanwendungen:

<b>Filtercharakteristik</b>	<b>Eigenschaften</b>	<b>Vorteile</b>	<b>Nachteile</b>
Kritische Dämpfung	Einfache Kaskadierung mit Verstärkern	Kein Überschwingen der Sprungantwort $h(t)$ , gutes Zeitverhalten	Geringe Flankensteilheit im ÜB
Butterworth	Maximal flacher Verlauf im DB, Dämpfung im SB monoton steigend	Gutes Amplitudenverhalten im DB und SB	Geringe Flankensteilheit im ÜB
Chebyshev	Welligkeit im DB, Dämpfung im SB monoton steigend	Gute Flankensteilheit im ÜB	Grosse Gruppenlaufzeitänderung, schlechtes Zeitverhalten
Invers Chebyshev	Maximal flacher Verlauf im DB, Welligkeit im SB	Sehr gute Flankensteilheit im ÜB	Grosse Gruppenlaufzeitänderung, schlechtes Zeitverhalten
Elliptische Filter	Welligkeit im DB und SB	Sehr gute Flankensteilheit im ÜB	Grosse Gruppenlaufzeitänderung, schlechtes Zeitverhalten
Bessel	Impulsformung	Lineare Phase, konstante Gruppenlaufzeit im DB	Geringe Flankensteilheit im ÜB
Gauss	Impulsformung	Konstante Gruppenlaufzeit im DB und SB Kein Überschwingen der Sprungantwort, ISI-arm	Geringe Flankensteilheit im ÜB
Raised Cosine	Nyquist Filter, Impulsformung	ISI-frei	Geringe Flankensteilheit im ÜB

## Übertragungsfunktionen, Dämpfungsfunktionen

Übertragungs-, Impedanz- und Admittanzfunktionen werden als rationale Funktionen der komplexen Frequenz  $s$  dargestellt.

$$s = \sigma + j\omega$$

In der allgemeinen Elektrotechnik werden Übertragungsfunktionen als Ausgangs- zu Eingangsgrösse beschrieben, z.B.

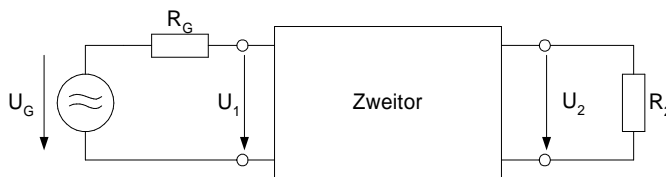
$$G(s) = \frac{U_{\text{out}}(s)}{U_{\text{in}}(s)} = \frac{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n}$$

Diese Übertragungsfunktion muss, wenn sie ein stabiles System beschreiben soll, Hurwitz sein, d.h. alle Pole müssen in der linken Halbebene von  $s$  (oder auf der  $j\omega$ -Achse, wenn keine Verluste vorhanden sind) liegen.

In der Filtertheorie wird die Übertragungsfunktion manchmal auch als Verhältnis der Eingangs- zur Ausgangsgrösse beschrieben:

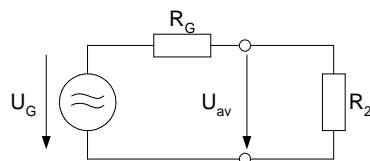
$$H(s) = \frac{1}{G(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ns^n}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ms^m}$$

Damit werden die Pole von  $G(s)$  zu Nullstellen von  $H(s)$  und die Nullstellen von  $G(s)$  zu Polen von  $H(s)$ .



Weiter wird in der Filtertheorie nicht die tatsächlich vorhandene Spannung  $U_1$  für die Bestimmung der Übertragungsfunktion verwendet, sondern diejenige Spannung, die bei einer maximalen Leistungsübertragung vom Generator zur Last (Leistungsanpassung) vorhanden ist:

$$u_{\text{av}} = \frac{U_G}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_G}}$$



Für den häufig auftretenden Fall, dass  $R_G = R_2$ , gilt

$$u_{\text{av}} = \frac{U_G}{2}$$

Die Übertragungsfunktion lautet mit diesen Definitionen

$$H(s) = \frac{u_{av}(s)}{u_2(s)} = \frac{u_G(s)}{2u_2(s)} \sqrt{\frac{R_2}{R_G}} = \frac{1}{s_{21}}$$

Die üblicherweise verwendete Definition für die Leistungsübertragungsfunktion ist die Einfügungsdämpfung (Insertionloss)

$$\frac{P_{20}}{P_2} = \left( \frac{R_2}{R_G + R_2} \right)^2 \left| \frac{u_G}{u_2} \right|^2$$

$P_2$  ist die Leistung, die beim beschalteten Zweitor in  $R_2$  absorbiert wird  
 $P_{20}$  ist die Leistung in  $R_2$ , wenn das Zweitor entfernt wird und  $R_2$  mit der Quelle und  $R_G$  verbunden wird.

Auch hier wird bei Anpassung  $P_{20}$  durch  $P_{av}$  ersetzt.  $P_{av}$  ist die von der Quelle maximal verfügbare Leistung.

$$P_{av} = \frac{|u_G|^2}{4R_G}$$

Die in der Filtertechnik verwendete Leistungsübertragungsfunktion  $P_{av}/P_2$  wird Transducer loss genannt.

$$\frac{P_{av}}{P_2} = \frac{R_2}{4R_G} \left| \frac{u_G(j\omega)}{u_2(j\omega)} \right|^2 = |H(j\omega)|^2 = \frac{1}{|G(j\omega)|^2} = \frac{1}{|s_{21}|^2}$$

Meist wird die Leistungsübertragungsfunktion als Dämpfungsfunktion (Attenuation) in dB verwendet.

$$A(\omega)/\text{dB} = 10 \log |H(j\omega)|^2 = 20 \log |H(j\omega)| = -20 \log |G(j\omega)| = -20 \log |s_{21}|$$

Für verlustlose, reziproke Zweitore gilt weiter

$$1 = |s_{11}|^2 + |s_{21}|^2 \quad \rightarrow \quad |s_{11}|^2 = 1 - |s_{21}|^2 \quad \rightarrow \quad |s_{21}|^2 = 1 - |s_{11}|^2$$

$$|s_{11}| = |s_{22}|$$

$$s_{12} = s_{21}$$

Daraus 
$$A(\omega)/\text{dB} = -10 \log(1 - |s_{11}|^2)$$

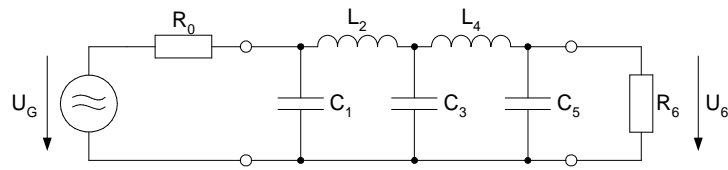
Dies bedeutet auch, dass bei verlustlosen passiven Filtern Dämpfung nur durch Reflexion erzielt wird.

$$s_{11} = r_1 = \frac{Z_1 - R_0}{Z_1 + R_0} \quad R_0 = \text{Bezugswiderstand}$$



### Phasen- und Gruppenlaufzeit

Für einen Tiefpass gemäss untenstehendem Schaltbild gilt:



$$\varphi = \arg \frac{u_G}{u_6} \quad \text{rad}$$

die Phasenlaufzeit

$$t_p = \frac{\varphi}{\omega}$$

und die Gruppenlaufzeit

$$t_g = \frac{d\varphi}{d\omega}$$

Es ist zu beachten, dass hier  $H(j\omega)$  in der Definition verwendet wird und daher das negative Vorzeichen in  $t_g$  fehlt.

Je nach Anwendung kann eine der Grössen von Bedeutung sein. Meistens ist die Gruppenlaufzeit von Bedeutung, weil nur wenn  $t_g$  konstant ist, am Ausgang ein originalgetreues Abbild des Eingangssignales möglich ist.

Tiefpässe mit obiger Struktur haben  $\varphi = 0$  für  $\omega = 0$ . Für  $\omega \rightarrow \infty$  erhält man

$$\varphi \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{n\pi}{2} \quad \text{rad} \quad n = \text{Anzahl reaktive Elemente}$$

Da der grösste Teil des Phasenganges im Durchlassbereich vorhanden ist, kann die Gruppenlaufzeit sehr grob abgeschätzt werden mit

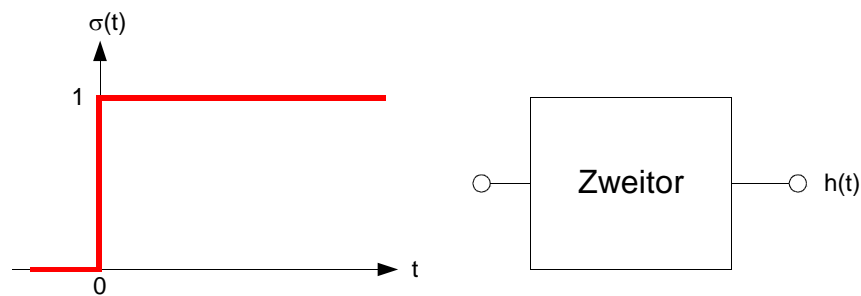
$$t_g \approx \frac{n\pi}{2\omega_1} \quad \omega_1 = \text{Grenzfrequenz}$$

Bei Bandpässen führt die gleiche Überlegung zur Abschätzung

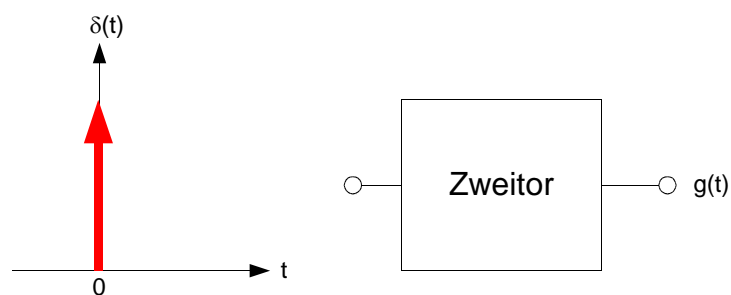
$$t_g \approx \frac{n\pi}{\omega_b - \omega_a}$$

**Sprungantwort, Impulsantwort**

Die **Sprungantwort  $h(t)$**  ist die Antwort eines Zweitors auf die Erregung mit einer Sprungfunktion  $\sigma(t)$ .



Die **Impulsantwort  $g(t)$**  ist die Antwort eines Zweitors auf eine Erregung mit einem Dirac-Impuls  $\delta(t)$ .



Diese Grössen stehen in folgenden Beziehungen zu einander:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

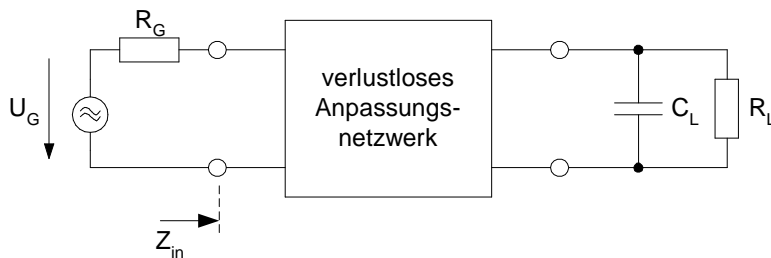
$$g(t) \quad \circ \bullet \quad G(s) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-st} dt$$

$$h(t) \quad \circ \bullet \quad \frac{G(s)}{s}$$

### Impedanzanpassungen

Werden Filter für Impedanzanpassungen verwendet, sind die Resultate der Untersuchungen von R.M.Fano von grosser Bedeutung: Fano zeigt, dass der Wirkungsgrad der Übertragung und die Bandbreite bei der Impedanzanpassung einer reaktiven Last austauschbar sind.

- Kleine Bandbreite → grosser Wirkungsgrad (kleiner Reflexionsfaktor)
- Grosse Bandbreite → kleiner Wirkungsgrad (grosser Reflexionsfaktor)



$$r_{in}(\omega) = \frac{Z_{in}(\omega) - R_G}{Z_{in}(\omega) + R_G}$$

Nach Fano ist das bestens zu erreichende Resultat begrenzt durch

$$\int_0^{\infty} \ln \left| \frac{1}{r(\omega)} \right| d\omega = \frac{\pi}{R_L C_L}$$

Mit  $0 \leq |r(\omega)| \leq 1$  und  $|r(\omega)| = 0$  für Anpassung, ist der Wirkungsgrad der Übertragung um so grösser, je grösser  $\ln \left| \frac{1}{r(\omega)} \right|$ .

Aber die Fläche unter der Kurve von  $\ln \left| \frac{1}{r(\omega)} \right|$  kann nicht grösser als  $\frac{\pi}{R_L C_L}$  sein.

Wenn innerhalb einem Frequenzband von  $\omega_a$  bis  $\omega_b$  beste Anpassung erzielt werden soll, muss ausserhalb  $\omega_a \leq \omega \leq \omega_b$   $|r| = 1$  sein.

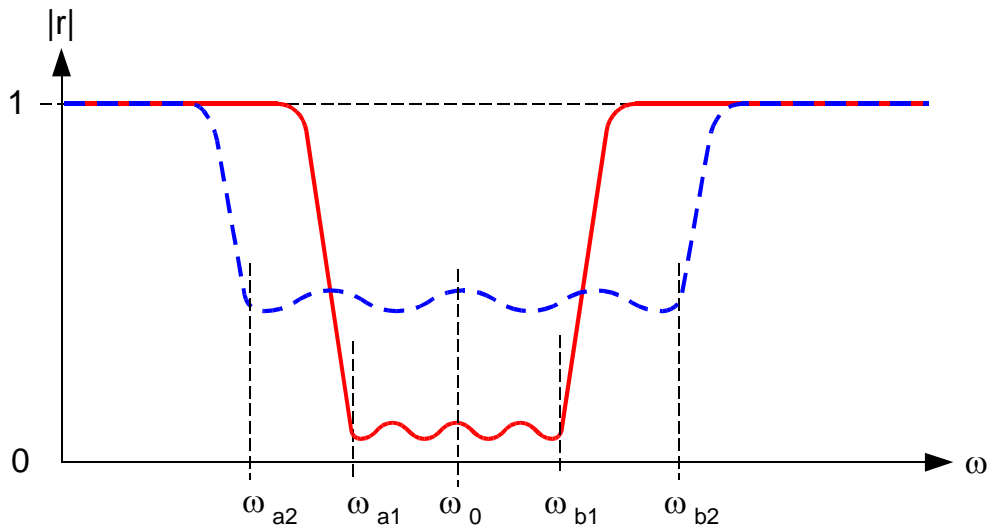
$$\int_{\omega_a}^{\omega_b} \ln \left| \frac{1}{r(\omega)} \right| d\omega = \frac{\pi}{R_L C_L}$$

Damit finden wir für diesen Idealfall

$$|r| = e^{\frac{-\pi}{(\omega_b - \omega_a)R_L C_L}} \quad \text{für } \omega_a \leq \omega \leq \omega_b$$

$$|r| = 1 \quad \text{für } 0 \leq \omega < \omega_a, \quad \omega_b < \omega \leq \infty$$

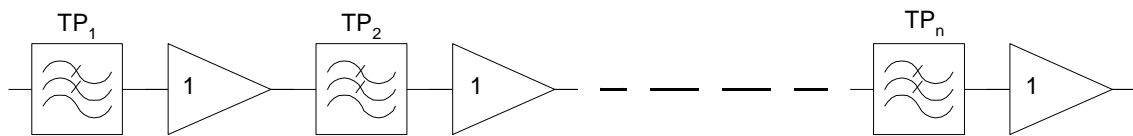
Für den realen Fall bei gegebenem  $R_L$  und  $C_L$  zeigt untenstehende Skizze die Beziehung zwischen Impedanzanpassung und Bandbreite.



## 2. Filter mit kritischer Dämpfung

### Haupteigenschaften:

- Weist kein Überschwingen der Sprungantwort  $h(t)$  auf
- Geringe Flankensteilheit im Übergang zum Sperrbereich
- Erhält man, wenn  $n$  Tiefpässe 1. Ordnung mit Entkopplung kaskadiert werden



Die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses 1. Ordnung lautet:

$$G_1(s) = \frac{1}{1 + \eta s} \quad \eta = \text{reelle positive Konstante}$$

Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems lautet demnach

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)\dots G_n(s) = \prod_{i=1}^n G_i(s) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + \eta s}$$

In normierter Form mit

$$P = \frac{s}{\omega_c} = j \frac{\omega}{\omega_c} = j\Omega$$

$$G(p) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + \eta P} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + j\eta\Omega}$$

Der Betrag ergibt sich zu

$$|G(j\Omega)| = \left| \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + j\eta\Omega} \right| = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2\Omega^2}} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2\Omega^2}} \right)^n$$

$$|G(j\Omega)| = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2\Omega^2}} \right)^n$$

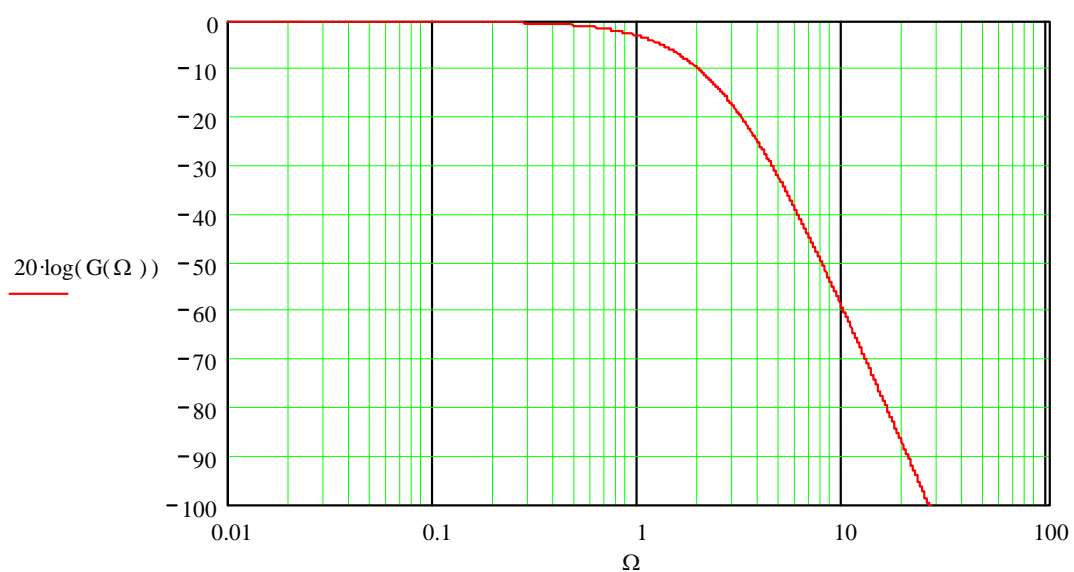
Bei  $\Omega = 1$ , ( $\omega = \omega_c$ ) soll der Amplitudengang den Wert von  $1/\sqrt{2}$  annehmen:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

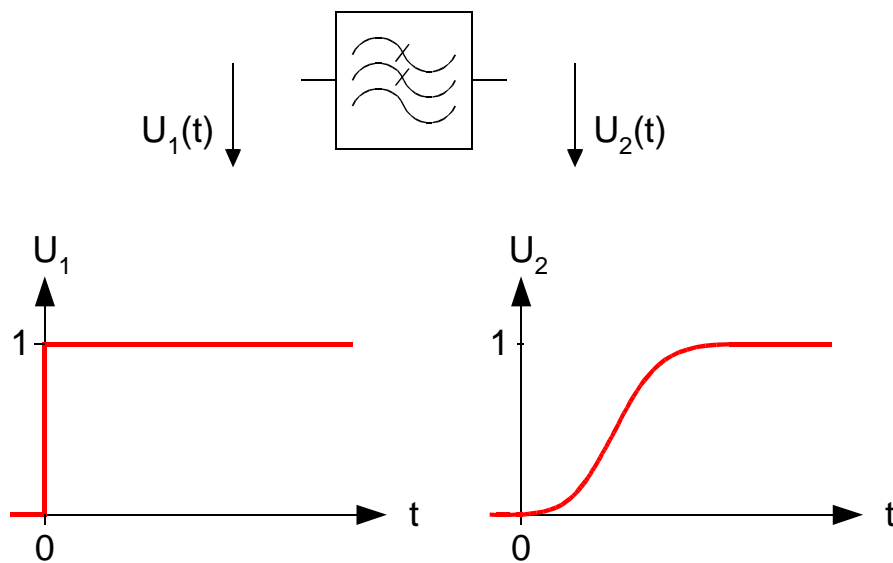
Damit wird die reelle Konstante

$$\eta = \sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}$$

n	$\eta$
1	1.0000
2	0.6436
3	0.5098
4	0.4350
5	0.3856
6	0.3499
7	0.3226
8	0.3008
9	0.2829
10	0.2679
11	0.2550
12	0.2439
13	0.2340



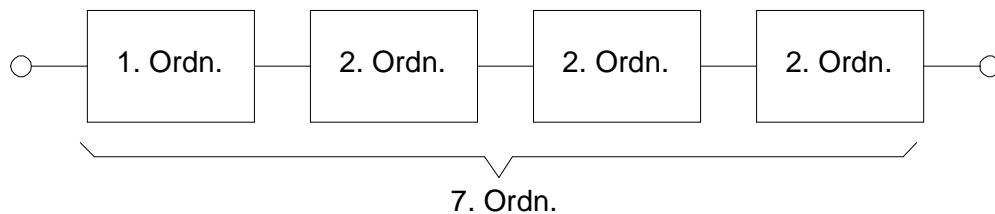
Filter mit kritischer Dämpfung  $n=5$



Sprungantwort Filter mit krit. Dämpfung

**Beispiel:** Bestimme die Filterkoeffizienten eines Tiefpassfilters 7. Ordnung mit kritischer Dämpfung. Grenzfrequenz = 5 kHz.

Das Filter kann auch beschrieben werden:



$$G(p) = \frac{1}{1 + \eta P} \cdot \frac{1}{1 + 2\eta P + \eta^2 P^2} \cdot \frac{1}{1 + 2\eta P + \eta^2 P^2} \cdot \frac{1}{1 + 2\eta P + \eta^2 P^2}$$

$$\eta = \sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1} = \sqrt{2^{\frac{1}{7}} - 1} = 0.3226$$

$$G(p) = \frac{1}{1 + 0.3226P} \cdot \left( \frac{1}{1 + 0.6453P + 0.1041P^2} \right)^3 \quad (\text{normierte Filterkoeffizienten})$$

Für die Entnormierung erhält man:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \alpha_1 s} \cdot \left( \frac{1}{1 + \alpha_2 s + \beta_2 s^2} \right)^3$$

$$\text{mit } P = \frac{S}{\omega_C} :$$

$$\alpha_1 = \frac{\eta}{\omega_C} = \frac{0.3226}{2\pi \cdot 5\text{kHz}} = 10.27 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$\alpha_2 = \frac{2\eta}{\omega_C} = \frac{2 \cdot 0.3226}{2\pi \cdot 5\text{kHz}} = 20.54 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$\beta_2 = \frac{\eta^2}{\omega_C} = \frac{0.3226^2}{2\pi \cdot 5\text{kHz}} = 3.313 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$



### 3. Bessel-Filter

(Thomson-Filter, Maximally Flat Delay Filter)

**Haupteigenschaften:**

- Weist im Durchlassbereich eine lineare Phasenänderung und damit konstante Gruppenlaufzeit

$$t_g \text{ auf } t_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

- Geringe Flankensteilheit im Übergang zum Sperrbereich

Aus der allgemeinen Übertragungsfunktion eines Tiefpasses in normierter Form

$$G(P) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 + a_i P + b_i P^2}$$

erhält man mit  $P = j\Omega$

$$G(j\Omega) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - b_i \Omega^2 + j a_i \Omega}$$

und damit die Phase

$$\varphi(\Omega) = -a \tan \frac{\text{Im}_{\text{Nenner}} \{G(j\Omega)\}}{\text{Re}_{\text{Nenner}} \{G(j\Omega)\}} = -\sum_{i=1}^n a \tan \left( \frac{a_i \Omega}{1 - b_i \Omega^2} \right)$$

$$t_g(\Omega) = -\frac{d\varphi(\Omega)}{d\Omega} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{1 + b_i \Omega^2}{1 + (a_i^2 - 2b_i) \Omega^2 + b_i^2 \Omega^4}$$

Für den Durchlassbereich  $0 \leq \Omega \leq 1$  gilt:  $\Omega^4 \ll \Omega^2$

$$t_g(\Omega) \approx \sum_{i=1}^n a_i \frac{1 + b_i \Omega^2}{1 + (a_i^2 - 2b_i) \Omega^2}$$

Diese Gleichung ist dann konstant (und damit die Gruppenlaufzeit konstant), wenn

$$b_i = a_i^2 - 2b_i \rightarrow b_i = \frac{a_i^2}{3}$$

Diese Eigenschaft erfüllen Besselpolynome:

$$B_n(P) = \sum_{i=0}^n \xi_i P^i = \xi_0 + \sum_{i=1}^n \xi_i P^i$$

Die Übertragungsfunktion kann dann geschrieben werden

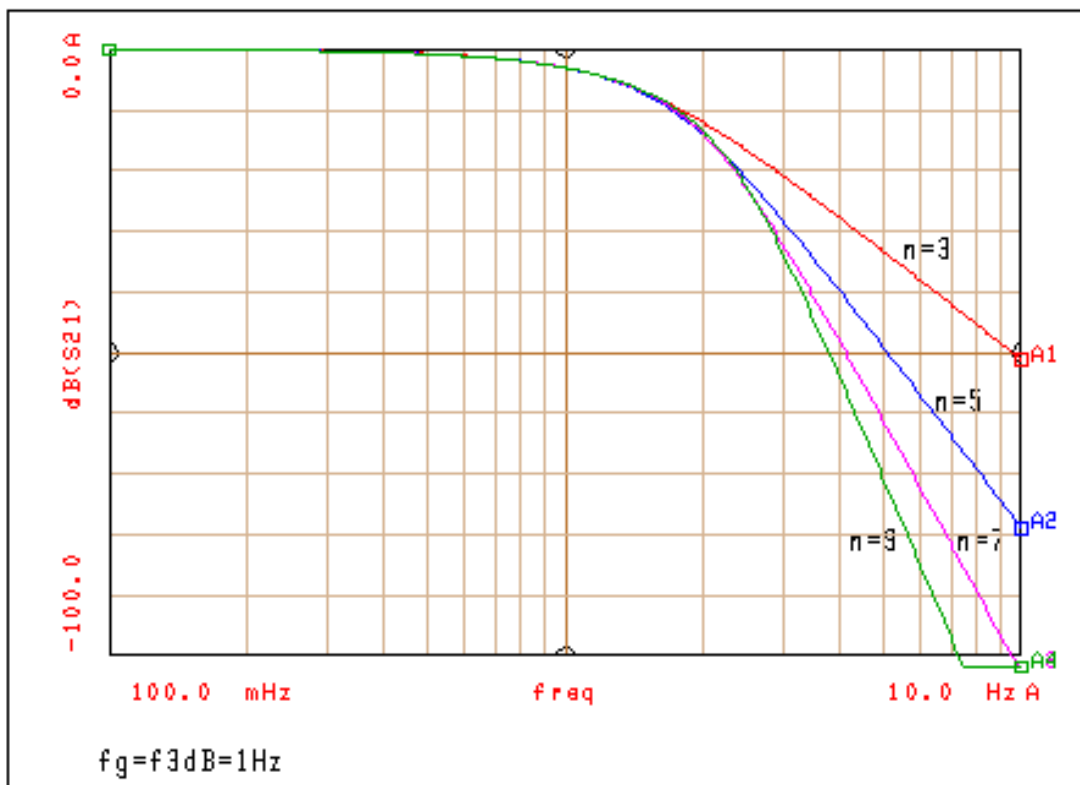
$$G(P) = \frac{\xi_0}{B_n(P)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{\xi_0} P^i}$$

Die Koeffizienten können bestimmt werden mit

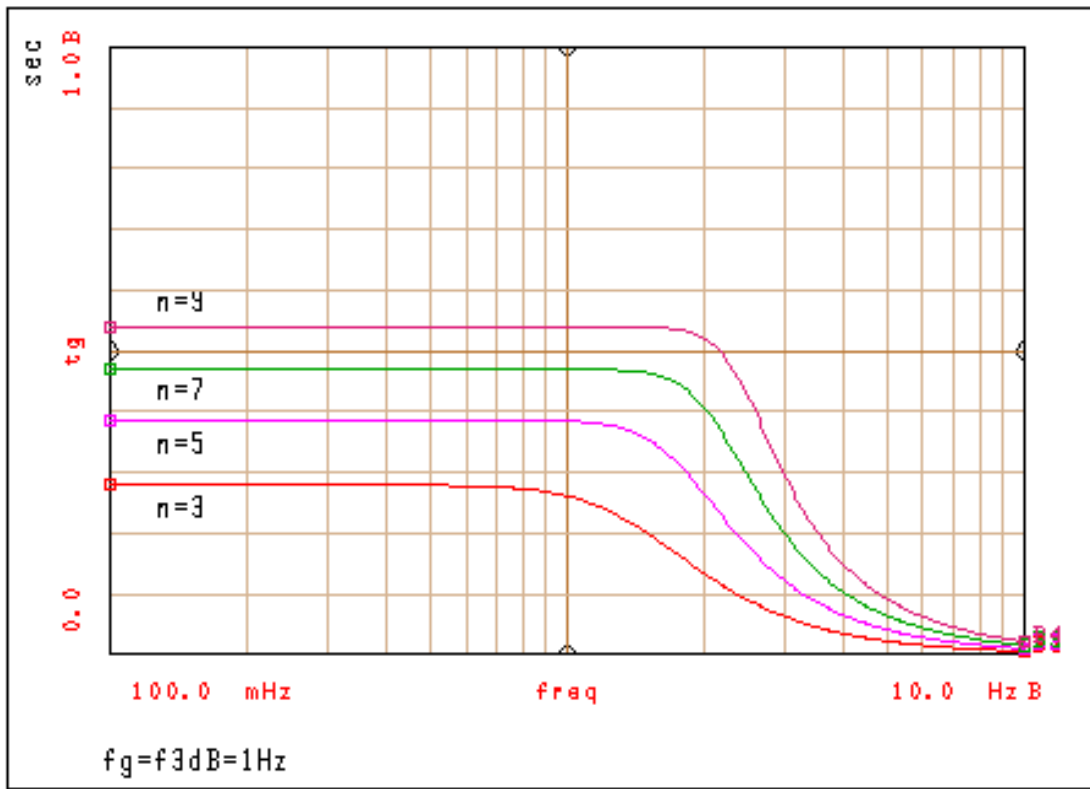
$$\xi_i = \frac{(2n-i)!}{2^{n-i} i! (n-i)!} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Besselkoeffizienten  $\xi_i$

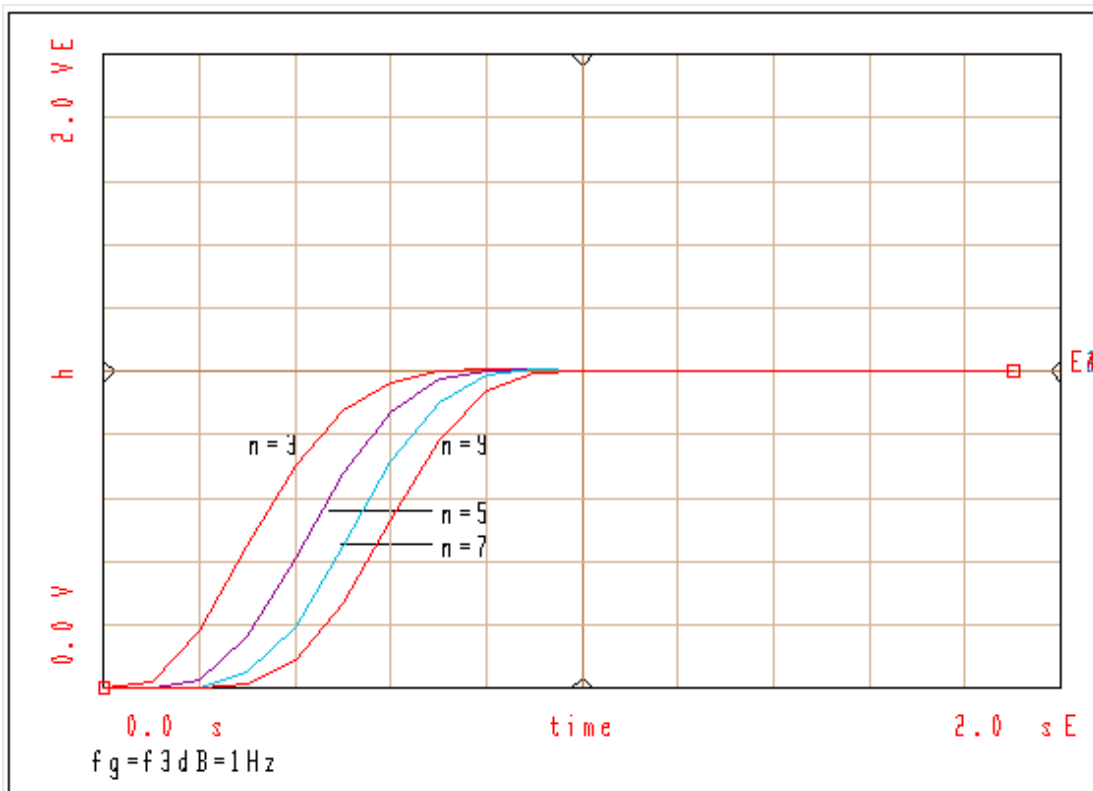
n	i					
	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	3	3	1			
3	15	15	6	1		
4	105	105	45	10	1	
5	945	945	420	105	15	1



Amplitudengang Bessel-Filter



Gruppenlaufzeit Bessel-Filter



Sprungantwort Besselfilter

## 4. Gauss-Filter

### Haupteigenschaften:

- konstante Gruppenlaufzeit im DB und SB
- kein Überschwingen der Sprungantwort  $h(t)$
- Geringe Flankensteilheit im Übergang zum Sperrbereich

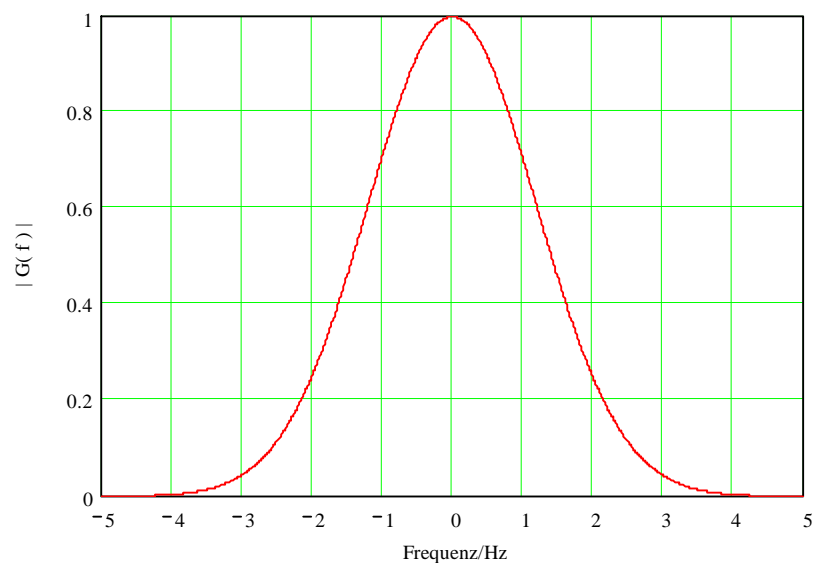
Das Gaussfilter ist kein Nyquistfilter, wird aber häufig bei digitalen Modulationen verwendet, z.B. GMSK (Gaussian Minimum Shift Keying).

Das Gaussfilter hat eine „weiche“ Impulsantwort ohne Nulldurchgänge. Die Übertragungsfunktion ergibt eine glockenförmige Amplitudenverteilung um  $f = 0$ .

$$|G(f)| = e^{-\left(\frac{f}{B}\right)^2 \alpha^2} \approx e^{-\left(\frac{f}{B}\right)^2 0.3466}$$

$$\text{mit } \alpha = \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} = \sqrt{\ln \sqrt{2}} \approx 0.5887$$

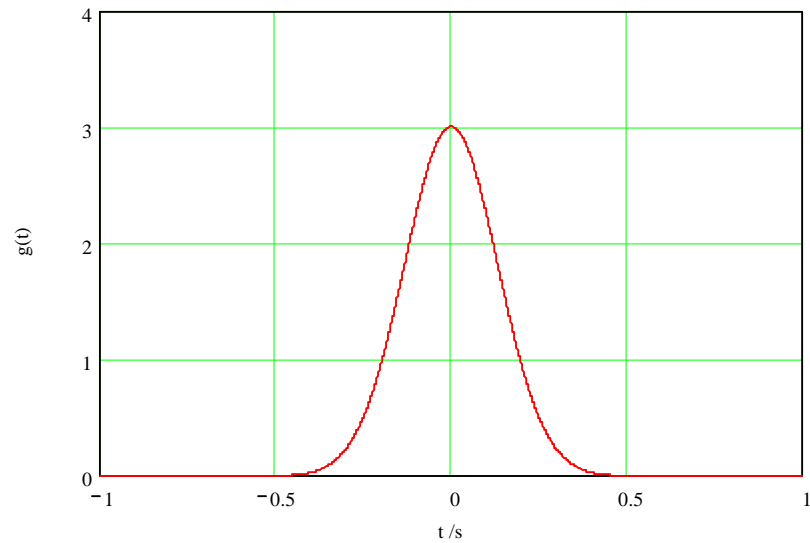
$$B = 3\text{dB-Bandbreite} = f_g$$



Normierter Amplitudengang ( $B = 1 \text{ Hz}$ )

Für die Impulsantwort finden wir

$$g(t) = B \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\pi^2 t^2 B^2}{\alpha^2}}$$



Normierte Impulsantwort ( $B = 1 \text{ Hz}$ )

In der digitalen Modulationstechnik wird das Bandbreite-Bitdauer-Produkt  $BT$  verwendet

$$BT = B \cdot T_b$$

$$B = 3\text{dB-Bandbreite} = f_g$$

$$T_b = \text{Bitdauer}$$

Die Übertragungsfunktion kann damit geschrieben werden

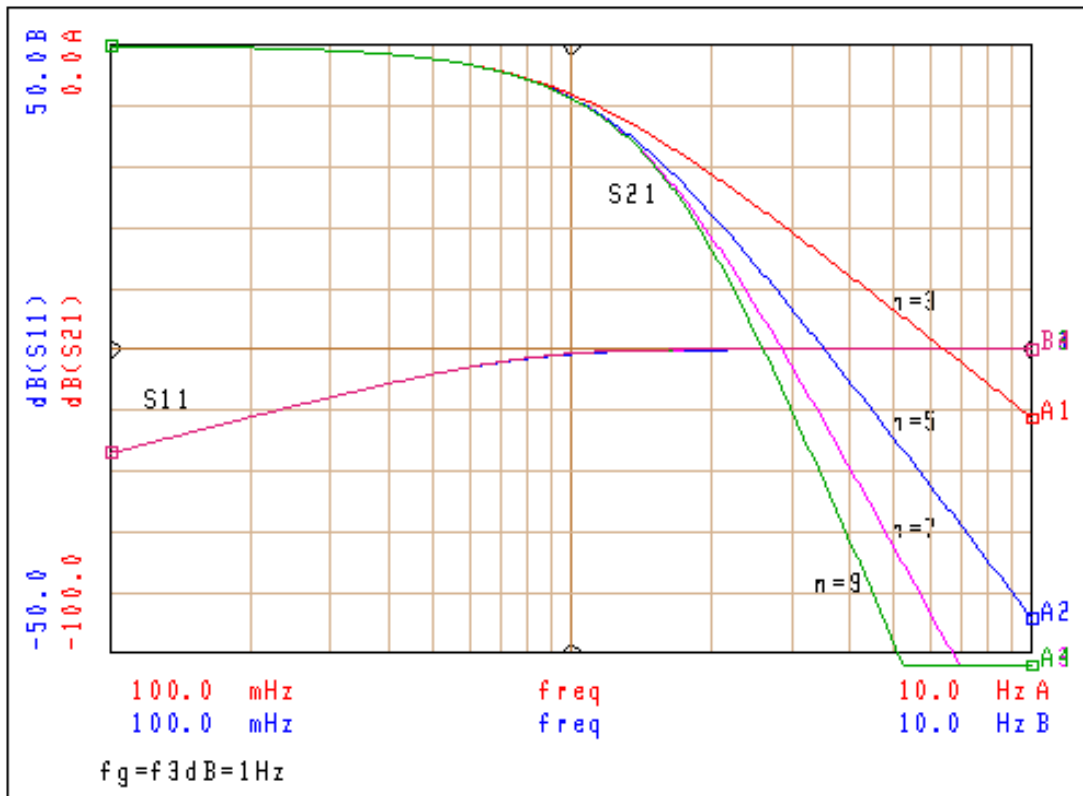
$$|G(f)| = e^{-\left(\frac{f}{BT \cdot r_b}\right)^2 \alpha^2}$$

$$r_b = \text{Bitrate} = \frac{1}{T_b}$$

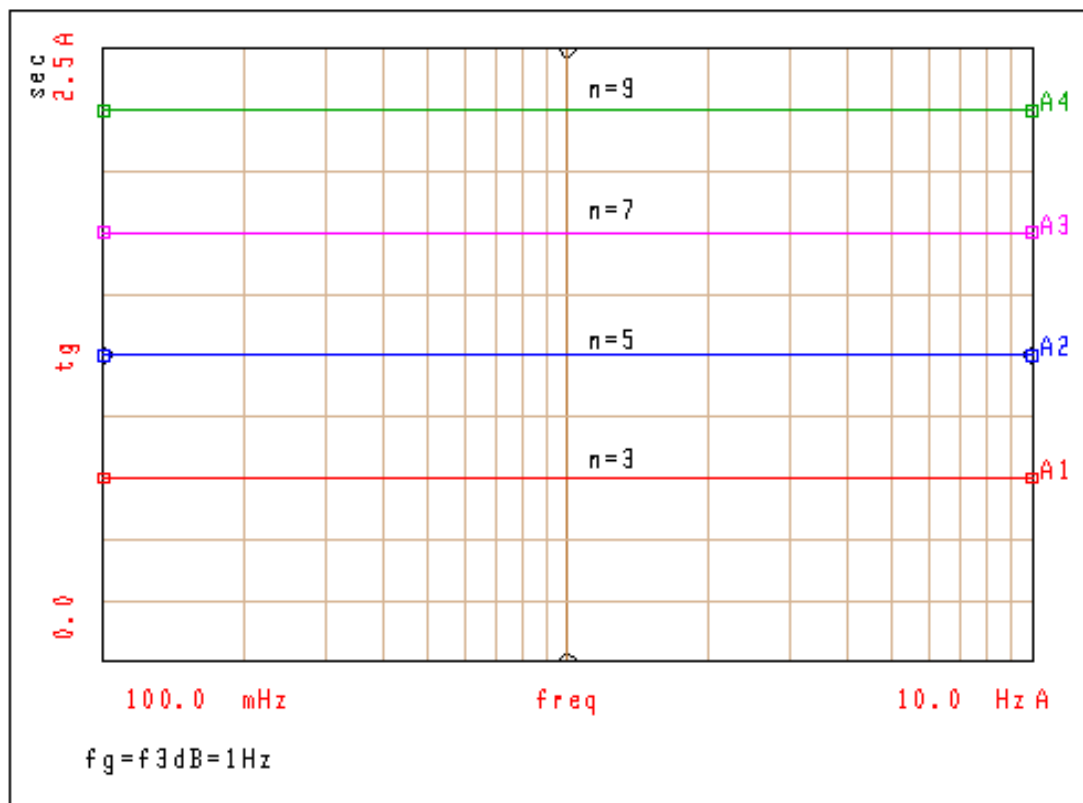
Für GSM (Global System Mobile, Natel D) werden Filter mit  $BT = 0.3$  und für DECT (Digital European Cordless Telephone) mit  $BT = 0.5$  verwendet.

<b>N</b>	<b>g1</b>	<b>g2</b>	<b>g3</b>	<b>g4</b>	<b>g5</b>
2	0.4738	2.1850			
3	0.2624	0.8167	2.2262		
4	0.1772	0.5302	0.9321	2.2450	
5	0.1312	0.3896	0.6485	0.9782	2.2533

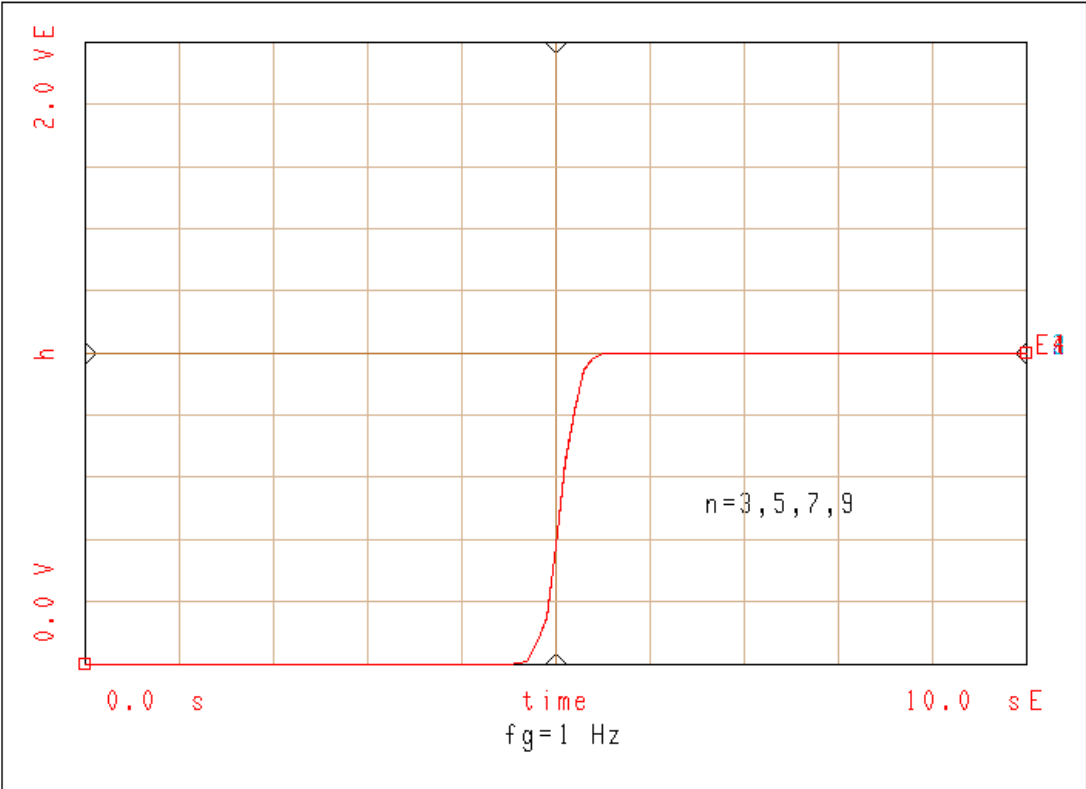
Tabelle der normierten Filterelemente für ein Gaussfilter (normiert auf  $\omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$   $R_o = 1 \Omega$ )



Amplitudengang und Rückflussdämpfung Gauss-Filter



Gruppenlaufzeit Gauss-Filter



Sprungantwort Gauss-Filter

## 5. Raised Cosine Filter

### Haupteigenschaften:

- kosinusförmiger Verlauf von  $G(f)$  im SB
- ISI-frei, (ISI = Intersymbol Interference)
- Das populärste Nyquistfilter in der Kommunikationstechnik

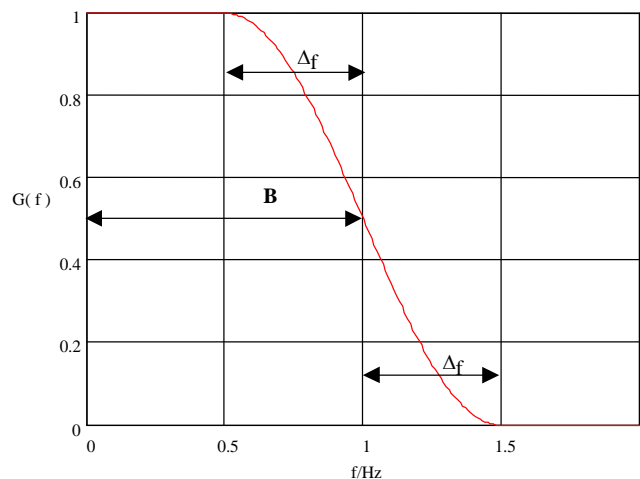
$$G(f) = \begin{cases} 1 & 0 \leq f < (1-\alpha) \\ \cos^2 \left\{ \frac{\pi}{4\alpha} \left[ \frac{f}{B} - (1-\alpha) \right] \right\} & (1-\alpha) \leq f \leq (1+\alpha) \\ 0 & (1+\alpha) < f \leq \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & 0 \leq f < (1-\alpha) \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\pi}{2\alpha} \left( \frac{f}{B} - (1-\alpha) \right) \right] \right\} & (1-\alpha) \leq f \leq (1+\alpha) \\ 0 & (1+\alpha) < f \leq \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & 0 \leq f < (1-\alpha) \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sin \left[ \frac{\pi}{2\alpha} \left( \frac{f}{B} - 1 \right) \right] \right\} & (1-\alpha) \leq f \leq (1+\alpha) \\ 0 & (1+\alpha) < f \leq \infty \end{cases}$$

Mit  $\alpha = \frac{\Delta f}{B}$   $0 \leq \alpha \leq 1$

$B = 50\%$ -Bandbreit = 6dB-Bandbreite





In digitalen Modulationssystemen ist nach Nyquist

$$B = \frac{1}{2T_s} \quad T_s = \text{Symboldauer}$$

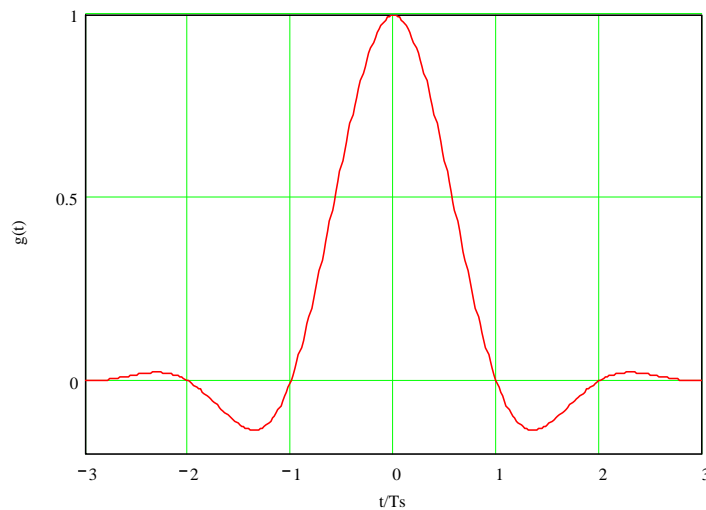
Damit kann geschrieben werden

$$G(f) = \begin{cases} 1 & 0 \leq f < \frac{(1-\alpha)}{T_s} \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\pi T_s}{\alpha} \left( f - \frac{1-\alpha}{2T_s} \right) \right] \right\} & \frac{(1-\alpha)}{T_s} \leq f \leq \frac{(1+\alpha)}{T_s} \\ 0 & \frac{(1+\alpha)}{T_s} < f \leq \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & 0 \leq f < \frac{(1-\alpha)}{T_s} \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sin \left[ \frac{\pi T_s}{\alpha} \left( f - \frac{1}{T_s} \right) \right] \right\} & \frac{(1-\alpha)}{T_s} \leq f \leq \frac{(1+\alpha)}{T_s} \\ 0 & \frac{(1+\alpha)}{T_s} < f \leq \infty \end{cases}$$

Für die zugehörige Impulsantwort erhält man

$$g(t) = \left( \frac{\sin \frac{\pi t}{T_s}}{\frac{\pi t}{T_s}} \right) \cdot \left( \frac{\cos \frac{\pi \alpha t}{T_s}}{1 - \left( 2\alpha \frac{t}{T_s} \right)^2} \right)$$



Impulsantwort  $g(t)$

Mit zunehmendem  $\alpha$  wird

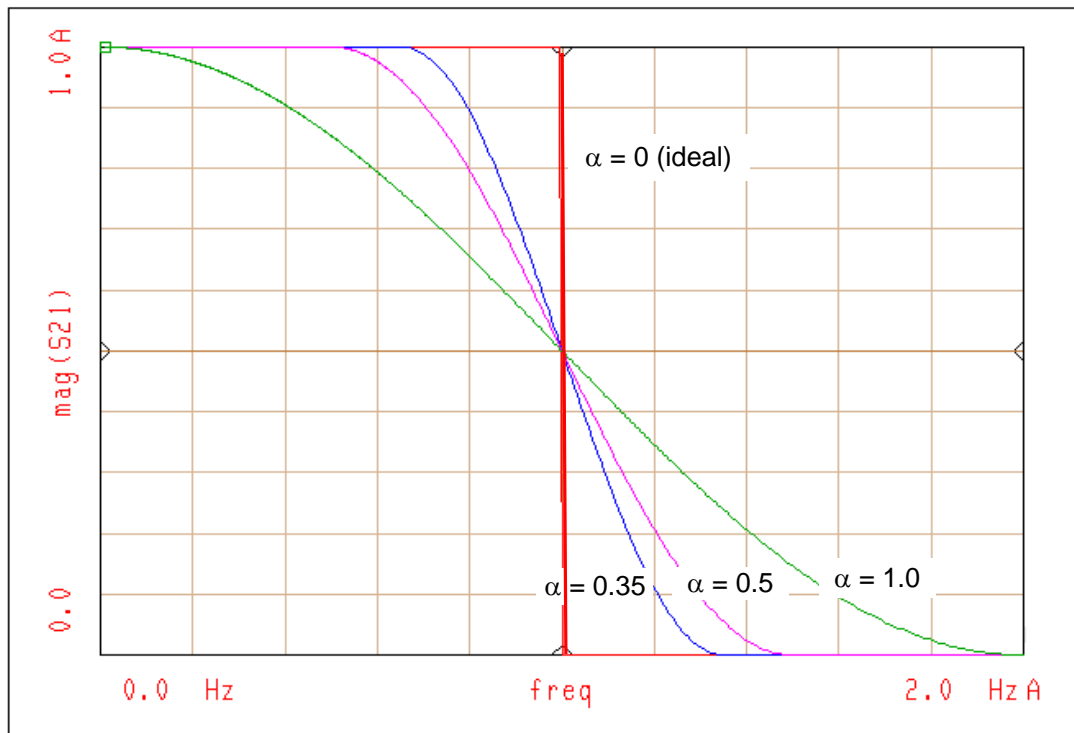
- Die Bandbreite grösser
- Die Amplitude von  $g(t)$  im Bereich von  $n \cdot T_s$  kleiner

Die Symbolrate die über ein solches Filter übertragen werden kann, ist

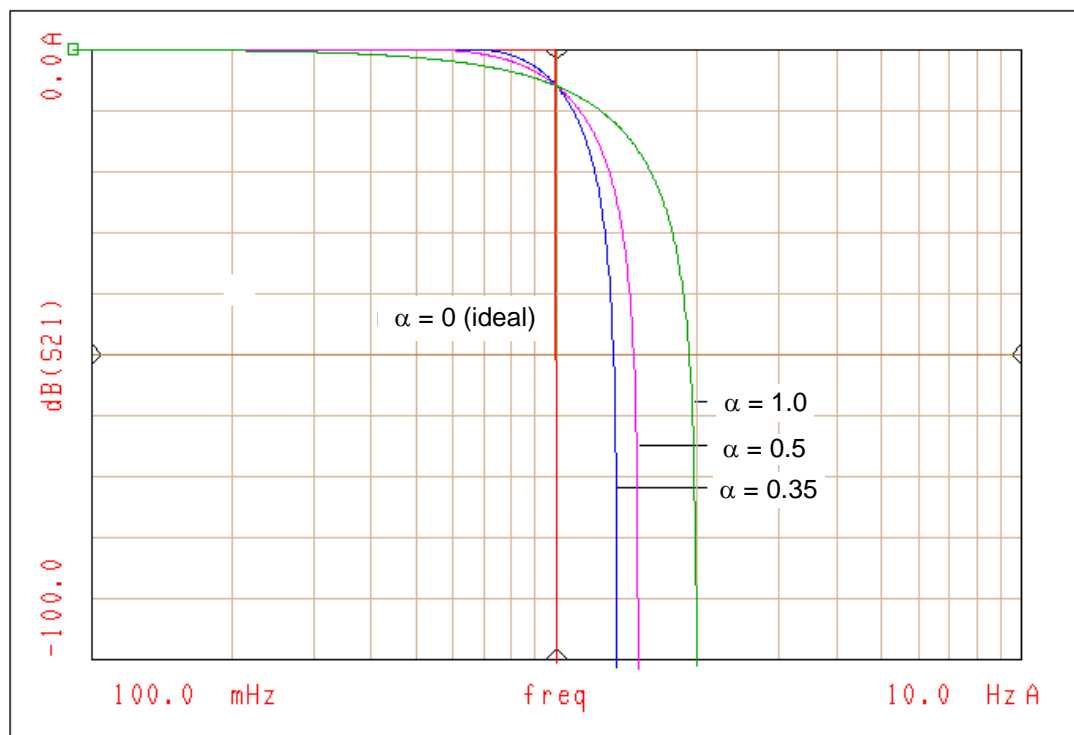
$$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{2B}{1 + \alpha}$$

Für HF-Kanäle steht die doppelte Bandbreite zur Verfügung, so dass gilt

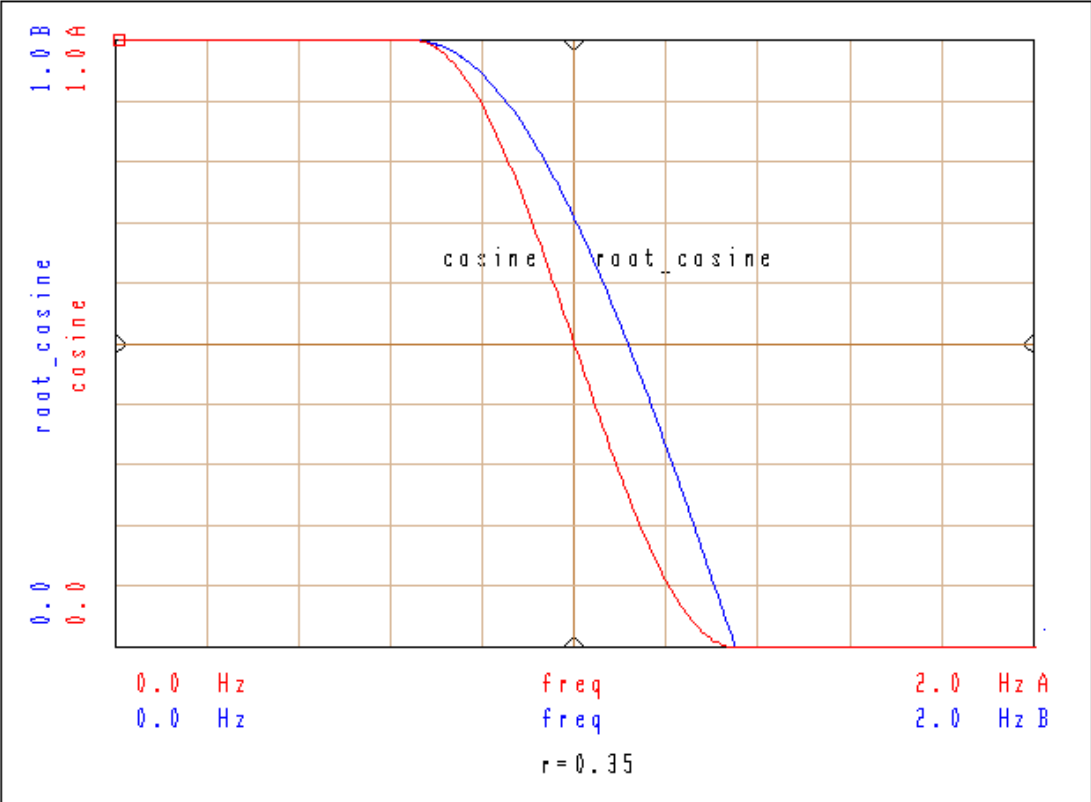
$$R_s = \frac{B_{\text{HF}}}{1 + \alpha}$$



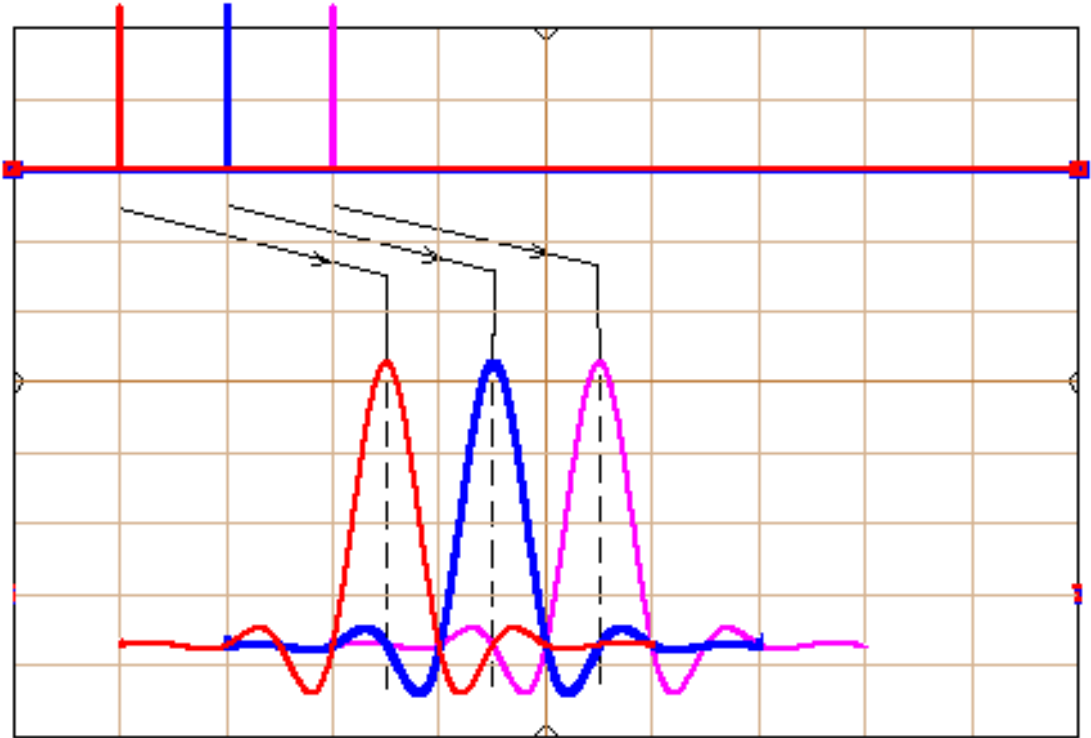
Amplitudengang Raised Cosine Filter mit verschiedenen  $\alpha$



Amplitudengang Raised Cosine Filter mit verschiedenen  $\alpha$



Amplitudengang Raised Cosine und Root Raised Cosine Filter mit  $\alpha = 0.35$



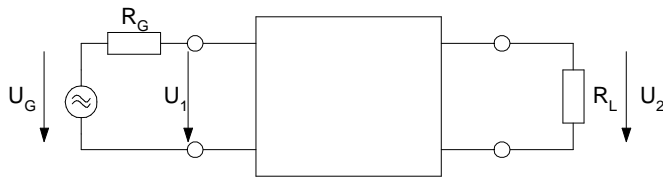
Impulsantwort drei aufeinanderfolgender Impulse

## 6. Butterworth

(Allpole-Filter, Maximally Flat, Potenzfilter)

**Haupteigenschaften:**

- Maximal flacher Dämpfungsverlauf im DB
- Dämpfung im SB monoton steigend
- Schlechte Flankensteilheit im ÜB



$$G(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)}$$

$$H(s) = \frac{u_1(s)}{u_2(s)} = \frac{1}{G(s)}$$

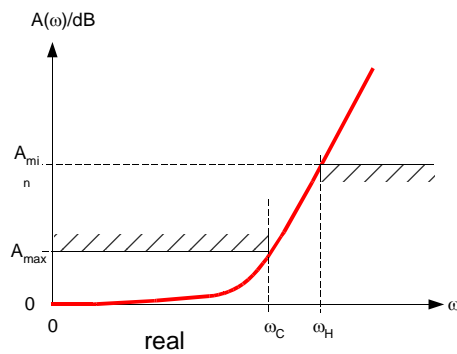
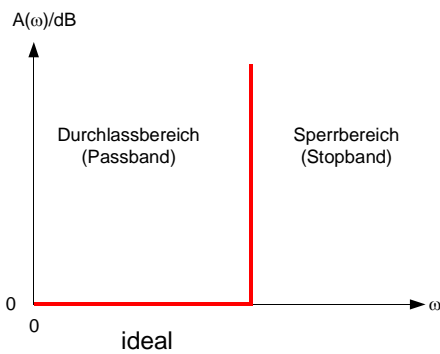
$$|G(s)|^2 = G(s)G(-s)$$

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s)$$

Dämpfungsfunktion:

$$A(\omega) = 10 \log |H(j\omega)|^2 = 20 \log |H(j\omega)| = -20 \log |G(j\omega)|$$

Tiefpass:



Der ideale Tiefpass:

Im Durchlassbereich soll gelten:  $|H(j\omega)| = 1 \quad (A = 0 \text{ dB})$

Im Sperrbereich soll gelten:  $|H(j\omega)| = \infty$

Um die Konstante von 1 zu eliminieren, wird die sogenannte Charakteristische Funktion  $K(s)$  eingeführt:

$$H(s)H(-s) = 1 + K(s)K(-s)$$

$$|H(j\omega)|^2 = 1 + |K(j\omega)|^2$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass  $H(s)$  und  $K(s)$  das gleiche Nennerpolynom aufweisen müssen, d.h. beide Funktionen haben die gleichen Pole.

$$H(s) = \frac{m(s)}{N(s)}$$

$$K(s) = \frac{q(s)}{N(s)}$$

Die Dämpfungsfunktion ergibt sich zu

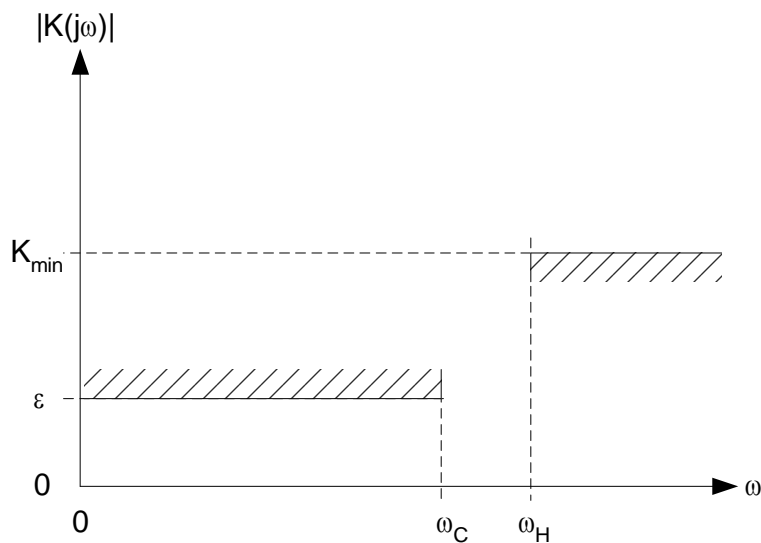
$$A(\omega) = 10 \log |H(j\omega)|^2 = 10 \log [1 + |K(j\omega)|^2]$$

Wenn  $|H(j\omega)|^2 = \infty$  oder  $|K(j\omega)|^2 = \infty \quad \rightarrow \quad A = \infty$

Aber nur wenn  $|K(j\omega)|^2 = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$

Die Charakteristische Funktion ist also für die Beschreibung besser geeignet, weil die Konstante 1 nicht enthalten ist.

Approximation des Tiefpassverhaltens:



Durchlassbereich:  $A_{\max} = 10 \log(1 + \varepsilon^2)$

Sperrbereich:  $A_{\min} = 10 \log(1 + K_{\min}^2)$

Zur Approximation des Tiefpassverhaltens können Butterworth-Polynome  $B_n(\omega)$ , n-ter Ordnung verwendet werden.

Die Eigenschaften dieser Polynome sollen sein:

- 1)  $B_n(\omega)$  ist ein Polynom n-ter Ordnung
- 2)  $B_n(0) = 0$
- 3)  $B_n(\omega)$  ist maximal flach im Ursprung
- 4)  $B_n(1) = 1$

Eigenschaft 1):  $B_n(\omega) = c_0 + c_1\omega + c_2\omega^2 + \dots + c_n\omega^n$

Eigenschaft 2):  $c_0 = 0$

Eigenschaft 3): Bedeutet, dass im Ursprung so viele Ableitungen wie möglich Null sein sollen.

$$\frac{dB_n(\omega)}{d\omega} = c_1 + 2c_2\omega + 3c_3\omega^2 + \dots + nc_n\omega^{n-1}$$

Damit muss  $c_1 = 0$  sein und für höhere Ableitungen entsprechend höhere Koeffizienten.

Daraus resultiert:

$$B_n(\omega) = c_n \omega^n$$

Eigenschaft 4):  $c_n = 1$

Damit wird

$$B_n(\omega) = \omega^n$$

Mit

$$A(\omega) = 10 \log \left( 1 + |K(j\omega)|^2 \right)$$

$$K(j\omega) = \varepsilon B_n \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) = \varepsilon \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^n$$

erhalten wir:

$$A(\omega) = 10 \log \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2n} \right)$$

oder auf  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_c}$  normiert

$$A(\Omega) = 10 \log \left( 1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n} \right)$$

Diese Dämpfungsfunktion hat folgende Eigenschaften:

$$A(0) = 0$$

$$A(\omega_c) = 10 \log(1 + \varepsilon^2) = A_{\max}$$

Mit dieser Gleichung finden wir

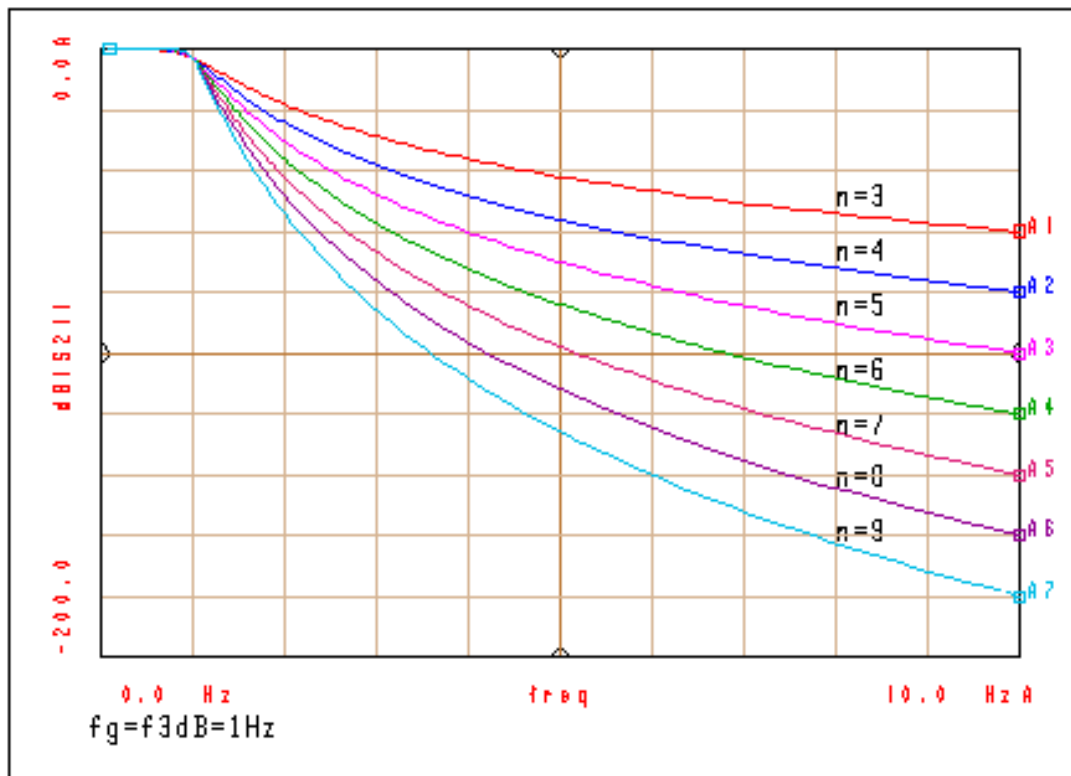
$$\varepsilon^2 = 10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1$$



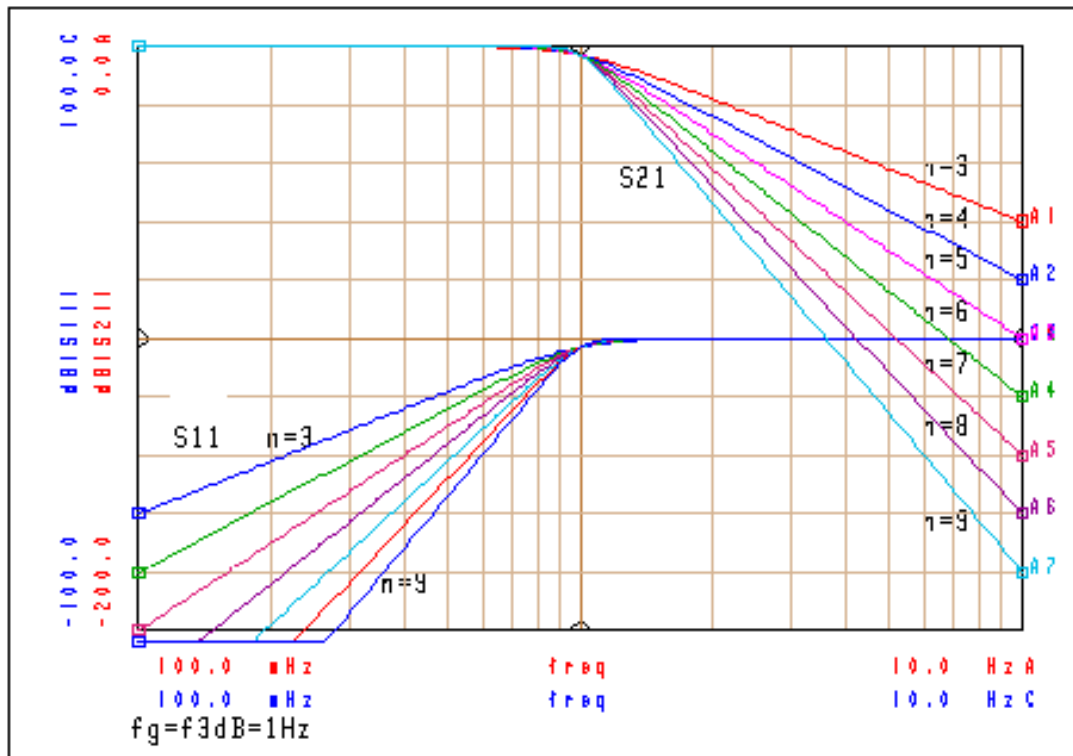
$$A(\omega_H) = 10 \log \left( 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\omega_H}{\omega_C} \right)^{2n} \right) = A_{\min}$$

Wird noch  $\varepsilon$  eingesetzt, erhält man nach  $n$  aufgelöst

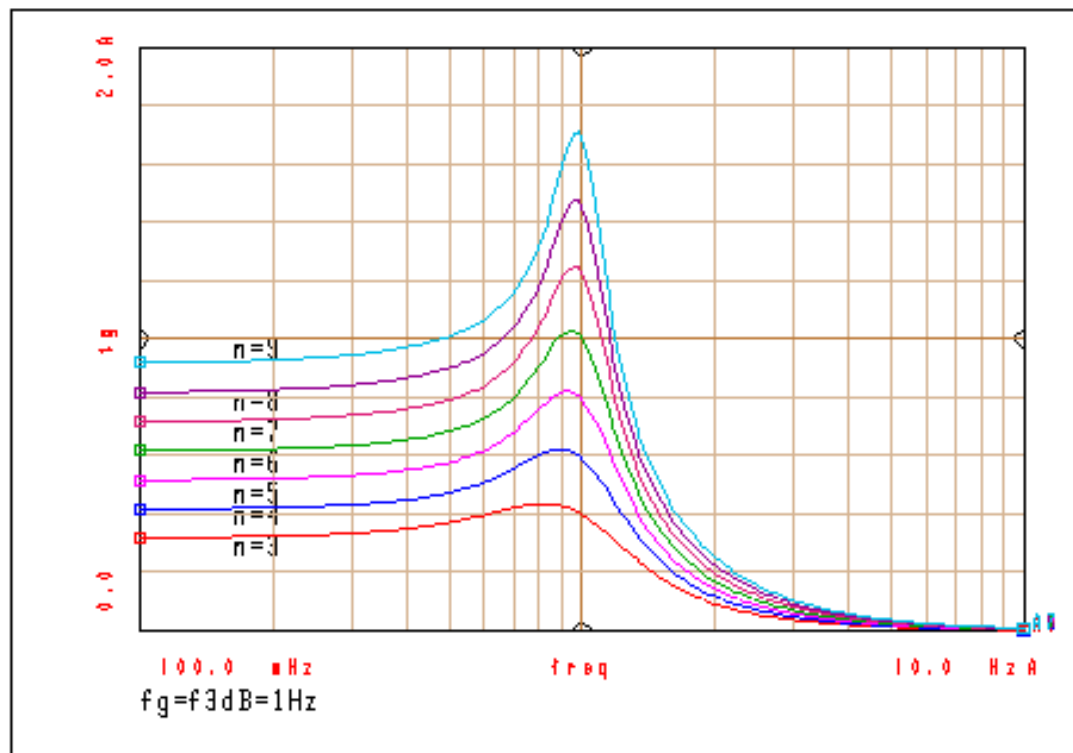
$$n = \frac{\log \left[ \left( 10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1 \right) / \left( 10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1 \right) \right]}{2 \log \left( \frac{\omega_H}{\omega_C} \right)}$$



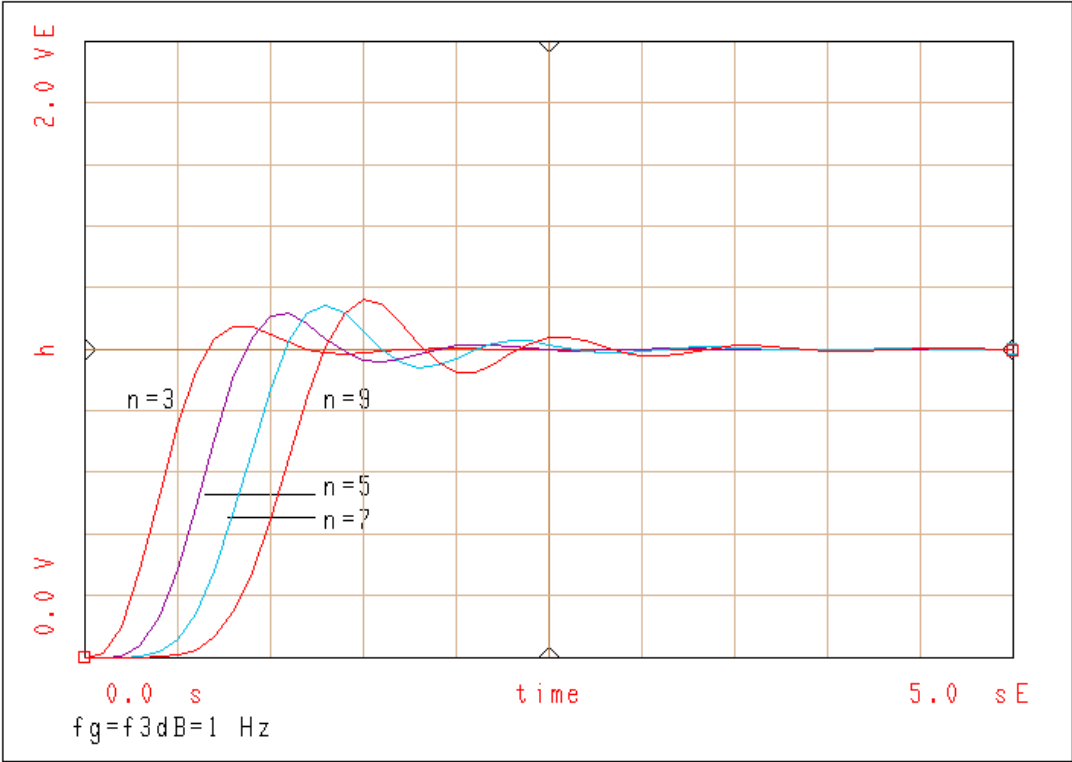
Amplitudengang Butterworth-Filter



Amplitudengang und Rückflussdämpfung Butterworth-Filter

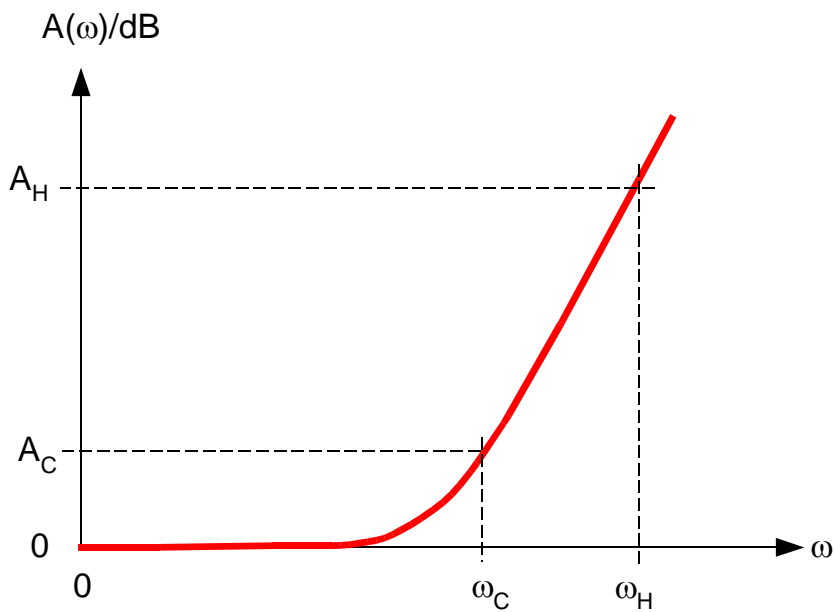
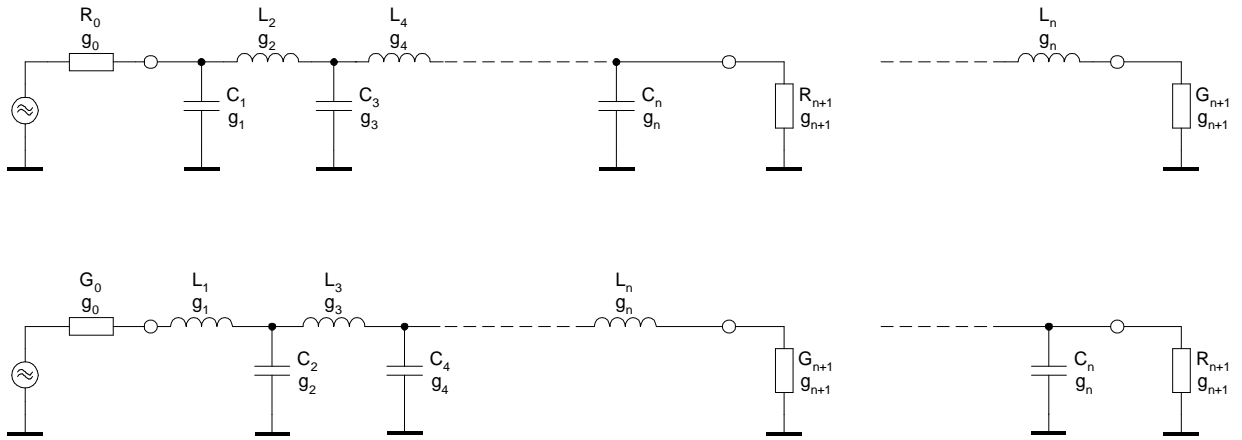


Gruppenlaufzeit Butterworth-Filter



Sprungantwort Butterworth-Filter

### Dimensionierung Butterworth:



$$A(\omega) = 10 \log \left[ 1 + \varepsilon^2 \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2n} \right]$$

$$\varepsilon^2 = 10^{\frac{A_c}{10}} - 1$$

$$A_c = 3.01 \text{ dB} : \varepsilon^2 = 1$$

$$n = \frac{\log \left[ \left( 10^{\frac{A_H}{10}} - 1 \right) / \varepsilon^2 \right]}{2 \log \left( \frac{\omega_H}{\omega_c} \right)}$$

Die Pole liegen auf dem Einheitskreis:

$$p_k = -\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] + j \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Normierte Elementwerte:

$$g_0 = 1$$

$$g_k = 2 \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right] \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$g_{n+1} = 1$$

Die Elementwerte sind normiert auf:

$$R' = 1\Omega \quad G' = 1S \quad \omega' = 1$$

Entnormierung:

$$R_k = g_k \left(\frac{R_0}{R'}\right) = g_k R_0$$

$$G_k = g_k \left(\frac{G_0}{G'}\right) = g_k G_0$$

$$L_k = g_k \left(\frac{R_0}{R'}\right) \left(\frac{\omega'}{\omega_c}\right) = g_k R_0 \frac{1}{\omega_c}$$

$$C_k = g_k \left(\frac{R'}{R_0}\right) \left(\frac{\omega'}{\omega_c}\right) = g_k \frac{1}{R_0 \omega_c}$$

## 7. Chebyshev

### Haupteigenschaften:

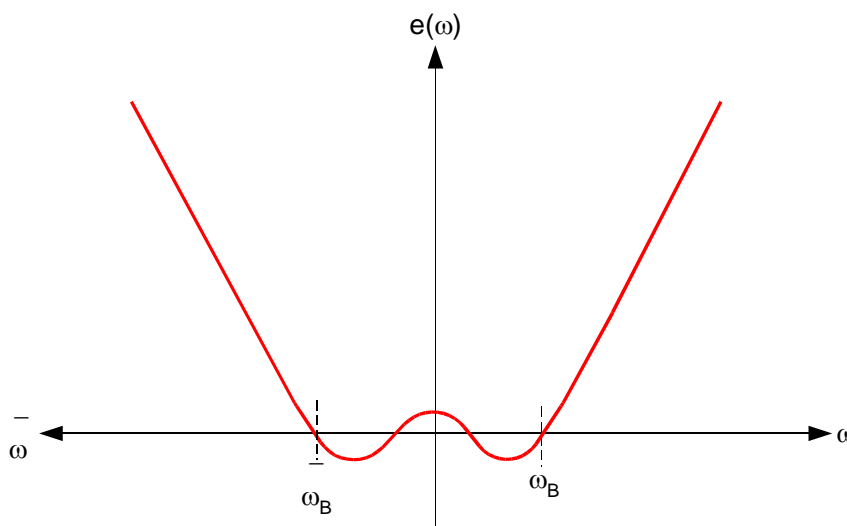
- Welligkeit im DB
- Gute Flankensteilheit im Übergang zum Sperrbereich
- Dämpfung im SB monoton steigend

Eine Funktion  $h(\omega)$  ist eine Chebyshev-Approximation von  $f(\omega)$ , wenn der Betrag des maximalen Fehlers minimiert ist.

Die Fehlerfunktion

$$e(\omega) = f(\omega) - h(\omega)$$

hat dann die Eigenschaft, dass sie zwischen einem Maximal- und Minimalwert oszilliert.



Für die Tiefpassapproximation soll im Durchlassbereich

$$-\omega_B \leq \omega \leq \omega_B$$

eine konstante Welligkeit erzielt werden.

Die Dämpfungsfunktion kann beschrieben werden als

$$A(\omega) = 10 \log \left( 1 + |K(j\omega)|^2 \right) = 10 \log \left[ 1 + \varepsilon^2 T_n^2 \left( \frac{\omega}{\omega_B} \right) \right]$$

$$|K(j\omega)|^2 = \varepsilon^2 T_n^2 \left( \frac{\omega}{\omega_B} \right)$$

Dabei ist  $T_n\left(\frac{\omega}{\omega_B}\right) = T_n(x)$  die Funktion eines Chebyshev-Polynoms n-ter Ordnung.

Die Eigenschaften von  $T_n(x)$  müssen sein:

- 1)  $T_n(x)$  ist gerade (ungerade), wenn n gerade (ungerade)
- 2)  $T_n(x)$  hat alle Nullstellen im Bereich  $-1 < x < 1$
- 3)  $T_n(x)$  oszilliert zwischen  $\pm 1$  im Bereich  $-1 \leq x \leq 1$
- 4)  $T_n(1) = +1$

Die Funktion

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$$

erfüllt diese Bedingungen.

Wir finden

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

Die Funktionen höherer Ordnungen können mit einer rekursiven Beziehung bestimmt werden:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Damit erhalten wir:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

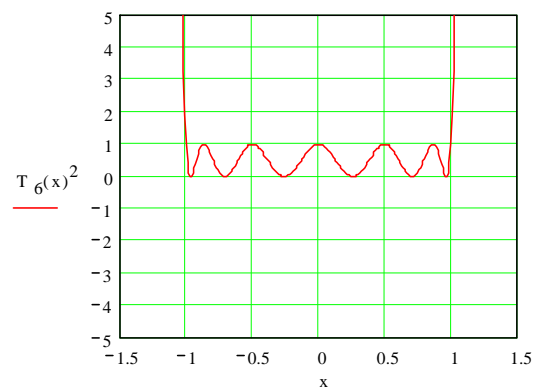
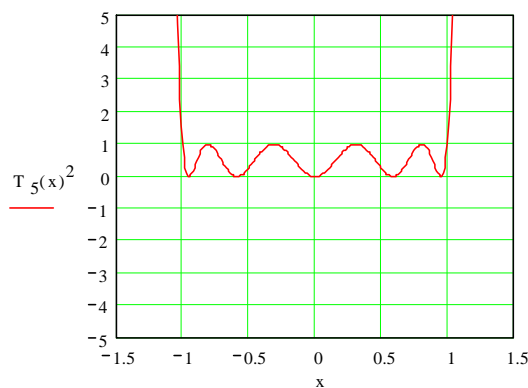
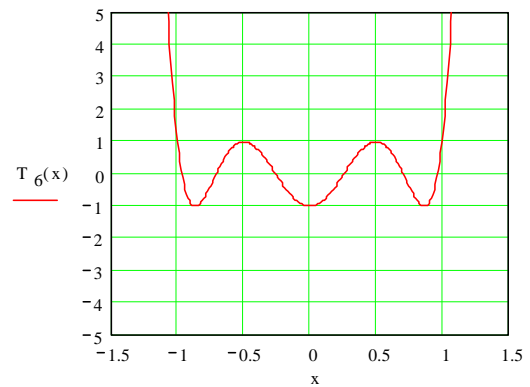
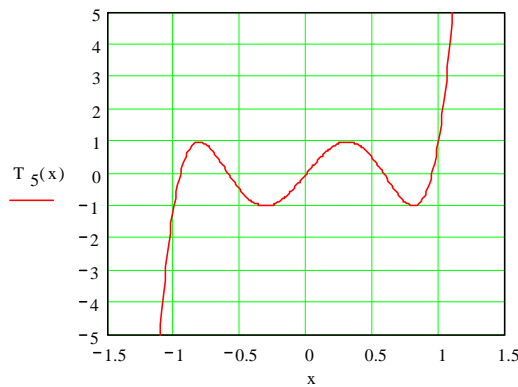
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

Übung: Stelle  $T_2(x)$  bis  $T_6(x)$  und  $T_2^2(x)$  bis  $T_6^2(x)$  für den Bereich  $-1.5 \leq x \leq +1.5$  dar und diskutiere die Eigenschaften.



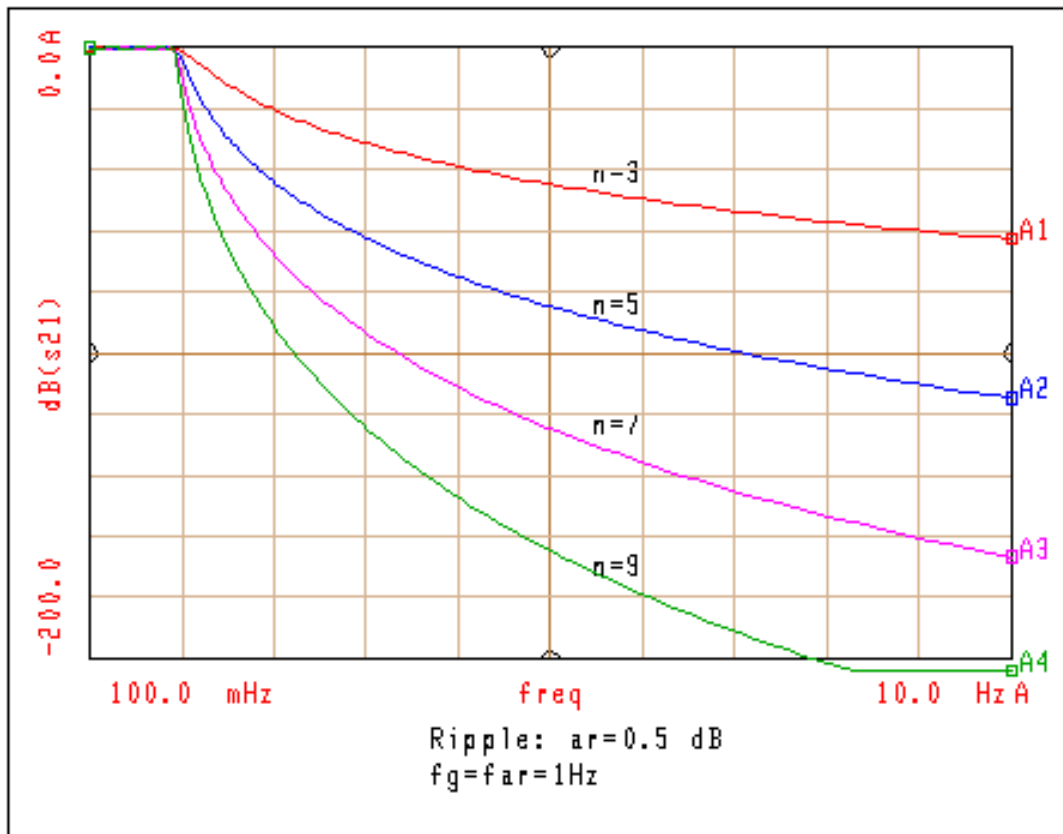
$T_n(x)$  für  $x > 1$ :  $\cos^{-1}(x)$  wird imaginär

da  $\cos^{-1}(x) = j \cosh^{-1}(x)$  und  $\cos(jx) = \cosh(x)$  gilt:

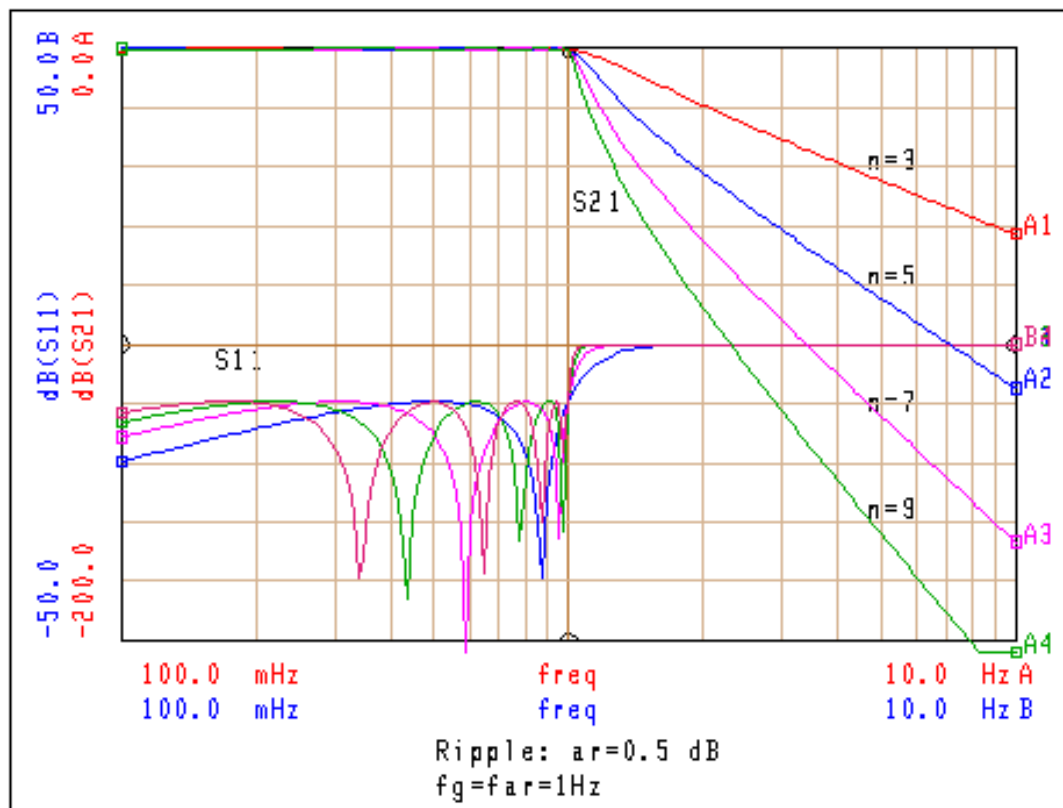
$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n \cos^{-1}(x)) \\ &= \cos(nj \cosh^{-1}(x)) \\ &= \cosh(nc \cosh^{-1}(x)) \end{aligned}$$

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cos^{-1}(x)) & -1 \leq x \leq 1 \\ \cosh(nc \cosh^{-1}(x)) & -1 > x > 1 \end{cases}$$

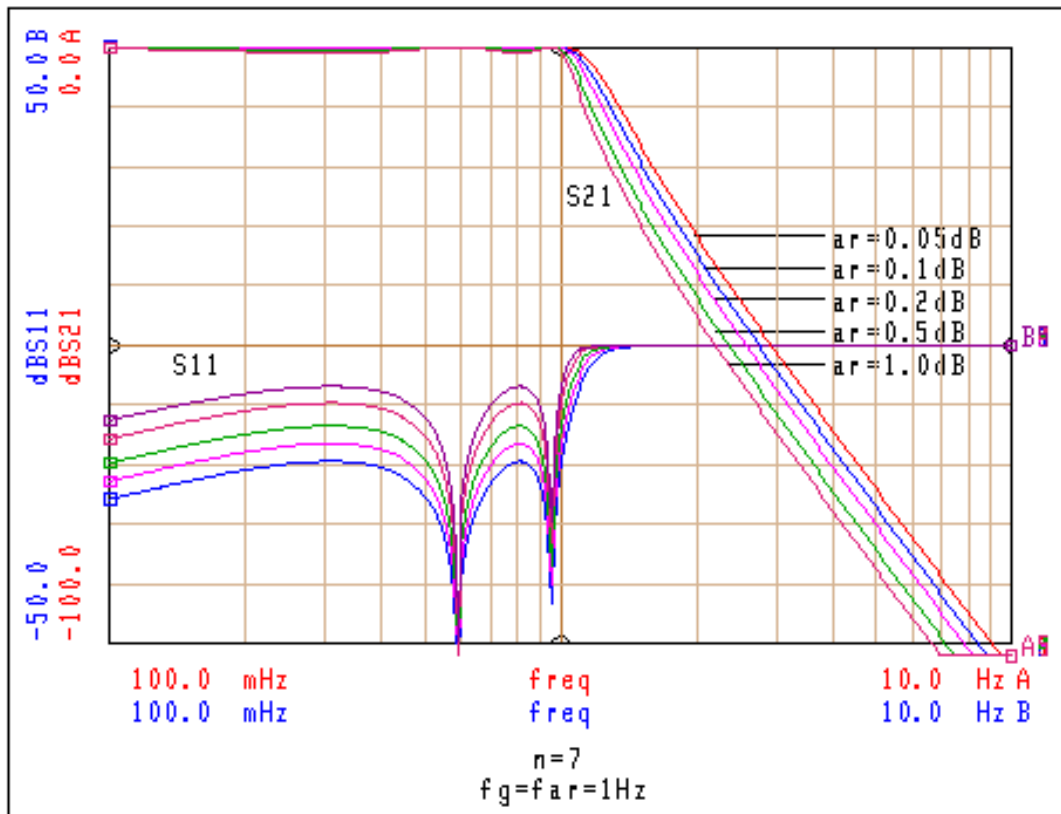




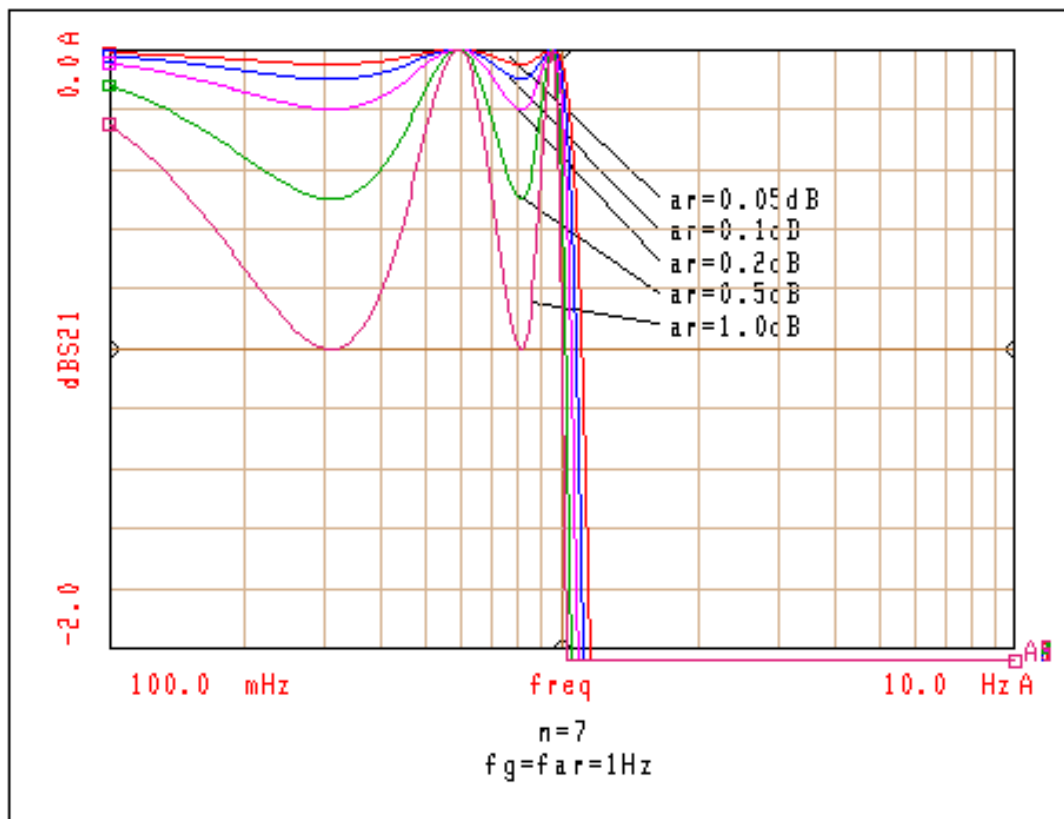
Amplitudengang Chebyshev-Filter



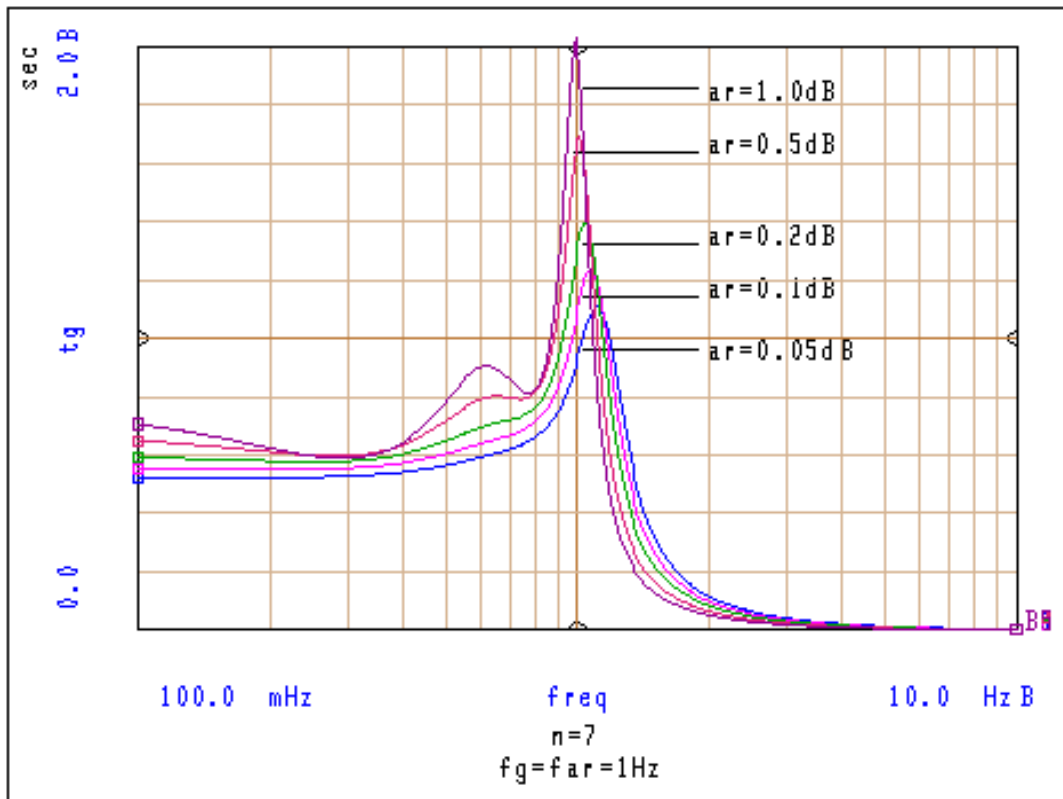
Amplitudengang und Rückflussdämpfung Chebyshev-Filter



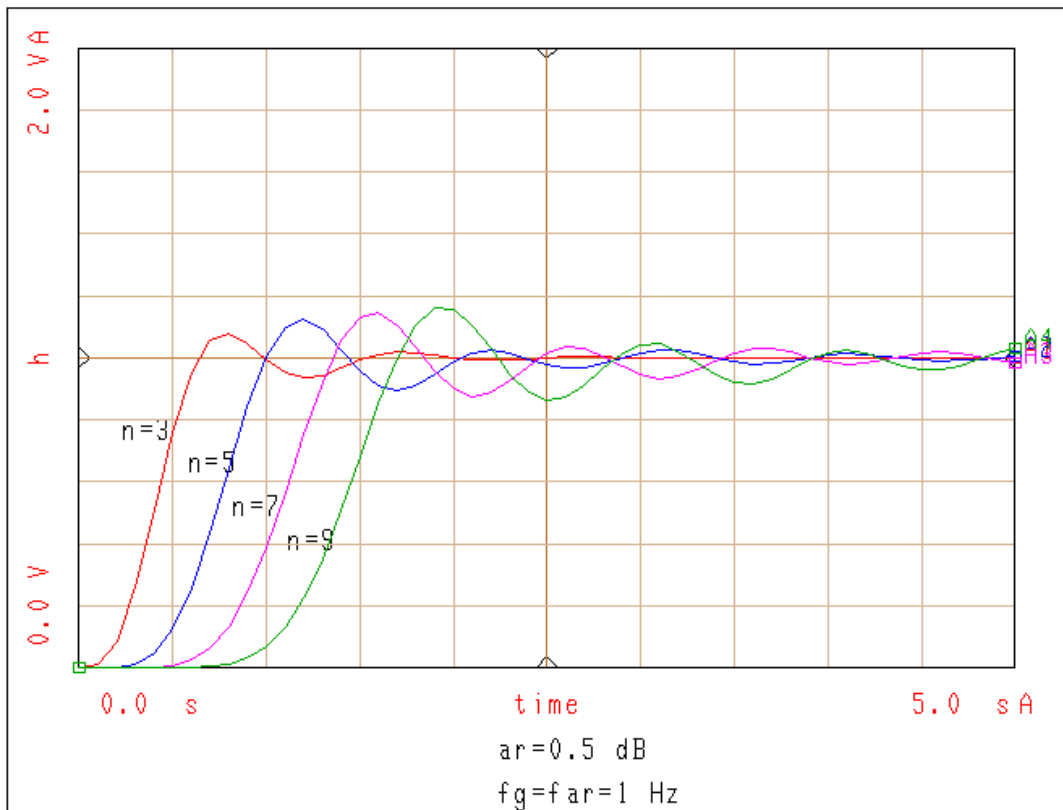
Amplitudengang und Rückflussdämpfung Chebyshev-Filter



Amplitudengang Chebyshev-Filter

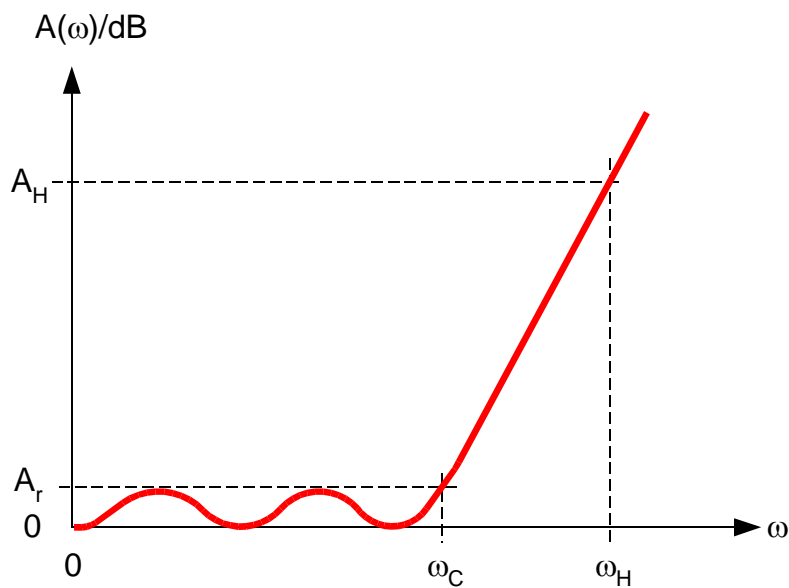


Gruppenlaufzeit Chebyshev-Filter



Sprungantwort Chebyshev-Filter

## Dimensionierung Chebyshev:



$$\varepsilon^2 = 10^{\frac{A_r}{10}} - 1$$

Durchlassbereich:

$$A(\omega) = 10 \log \left\{ 1 + \varepsilon^2 \cos^2 \left[ n \cdot \cos^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \right] \right\} \quad \omega \leq \omega_c$$

$$RL_{\min} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 - 10^{-\frac{A_r}{10}}}} \quad A_r = -10 \log \left( 1 - \frac{1}{10^{\frac{RL_{\min}}{10}}} \right)$$

Sperrbereich:

$$A(\omega) = 10 \log \left\{ 1 + \varepsilon^2 \cosh^2 \left[ n \cdot \cosh^{-1} \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right) \right] \right\} \quad \omega \geq \omega_c$$

$$n = \frac{\cosh^{-1} \sqrt{\frac{10^{\frac{A_H}{10}} - 1}{\varepsilon^2}}}{\cosh^{-1} \left( \frac{\omega_H}{\omega_c} \right)}$$

$$\omega_{3dB} = \omega_c \cosh \left( \frac{\cosh^{-1} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)}{n} \right)$$

Eigenschaften:

n gerade:  $n/2$  Frequenzen mit  $A = 0$   
 $R_{n+1} \neq R_0$   
 $G_{n+1} \neq G_0$

n ungerade:  $(n+1)/2$  Frequenzen mit  $A = 0$   
 $R_{n+1} = R_0$   
 $G_{n+1} = G_0$

Normierte Elementwerte:

$$g_0 = 1$$

$$g_1 = \frac{2a_1}{q}$$

$$g_k = \frac{4a_{k-1} \cdot a_k}{b_{k-1} \cdot g_{k-1}} \quad k = 2, 3, \dots, n$$

$$g_{n+1} = \begin{cases} 1 & n \text{ ungerade} \\ \coth^2 \left( \frac{m}{4} \right) & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$m = \ln \left( \coth \frac{A_r}{40 \cdot \log e} \right) = \ln \left( \coth \frac{A_r}{17.372} \right)$$

$$q = \sinh \frac{m}{2n}$$

$$a_k = \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

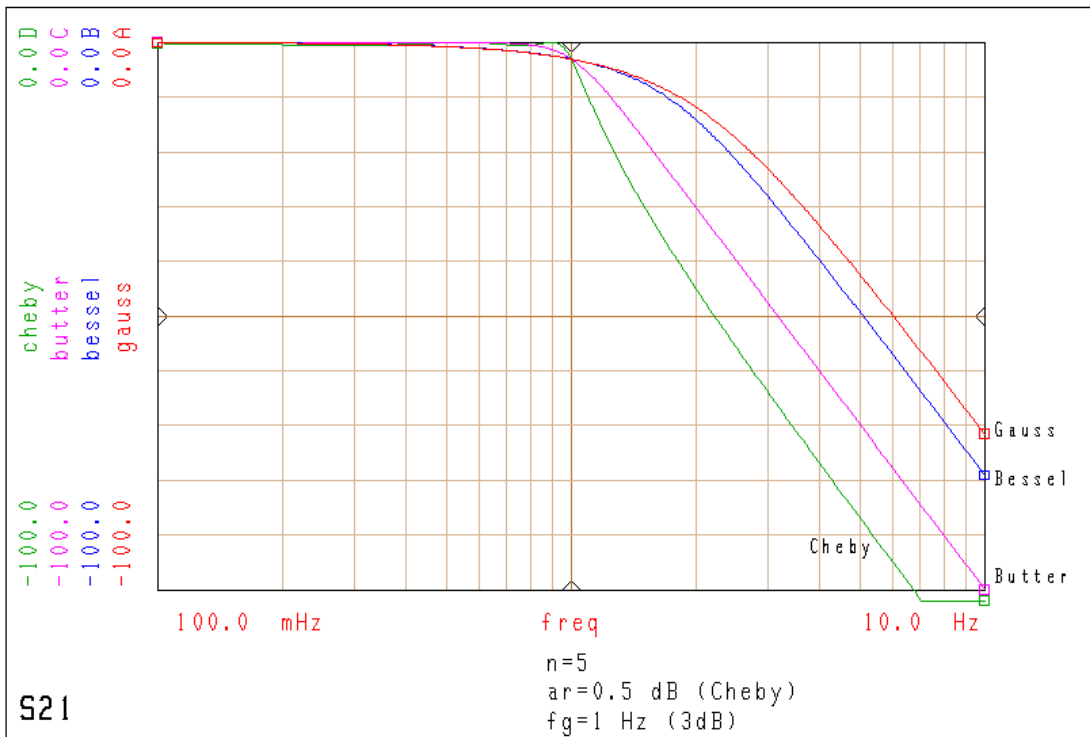
$$b_k = q^2 + \sin^2 \frac{k\pi}{n}$$

Die Pole liegen auf einer Ellipse:

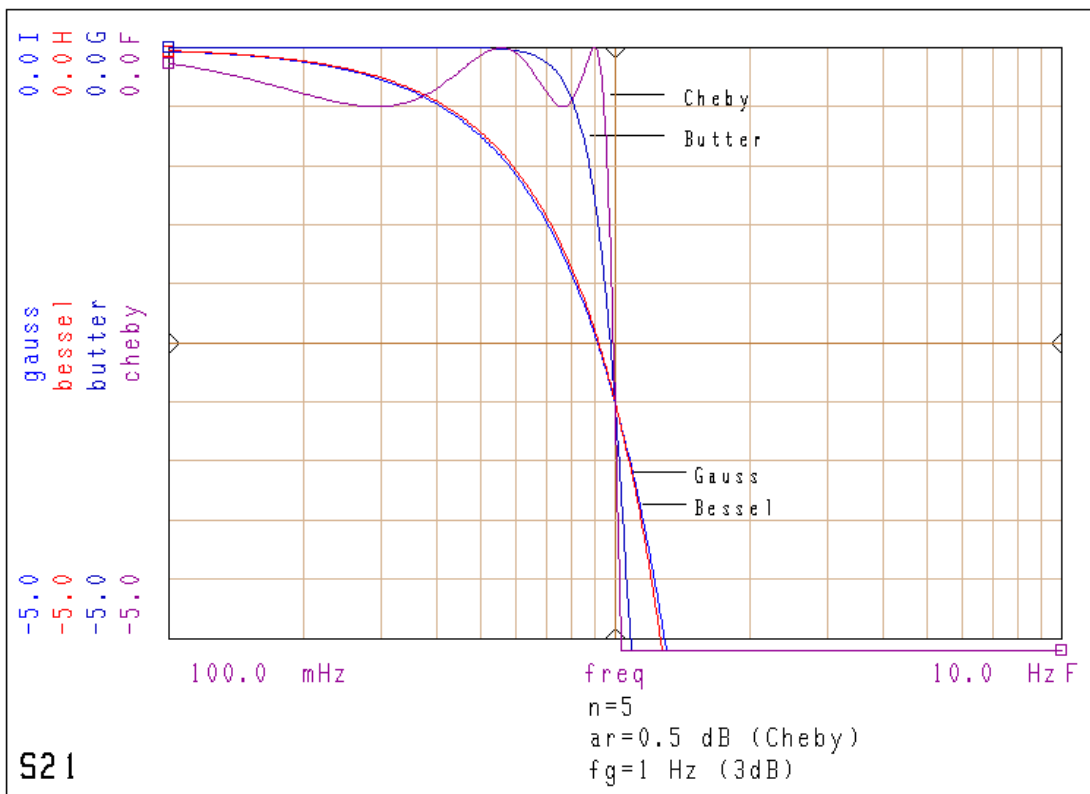
$$p_k = -\sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} \cdot \sinh P + j \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \cdot \cosh P$$

$$P = \frac{1}{n} \sinh^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

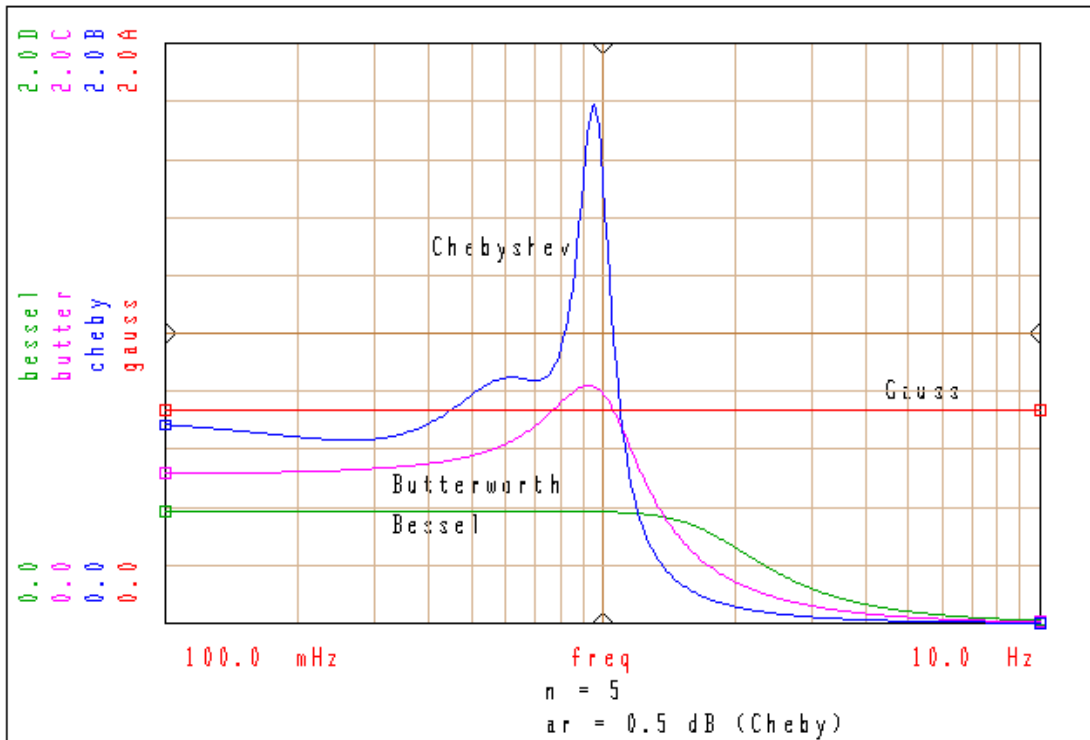
### 8. Filtervergleich



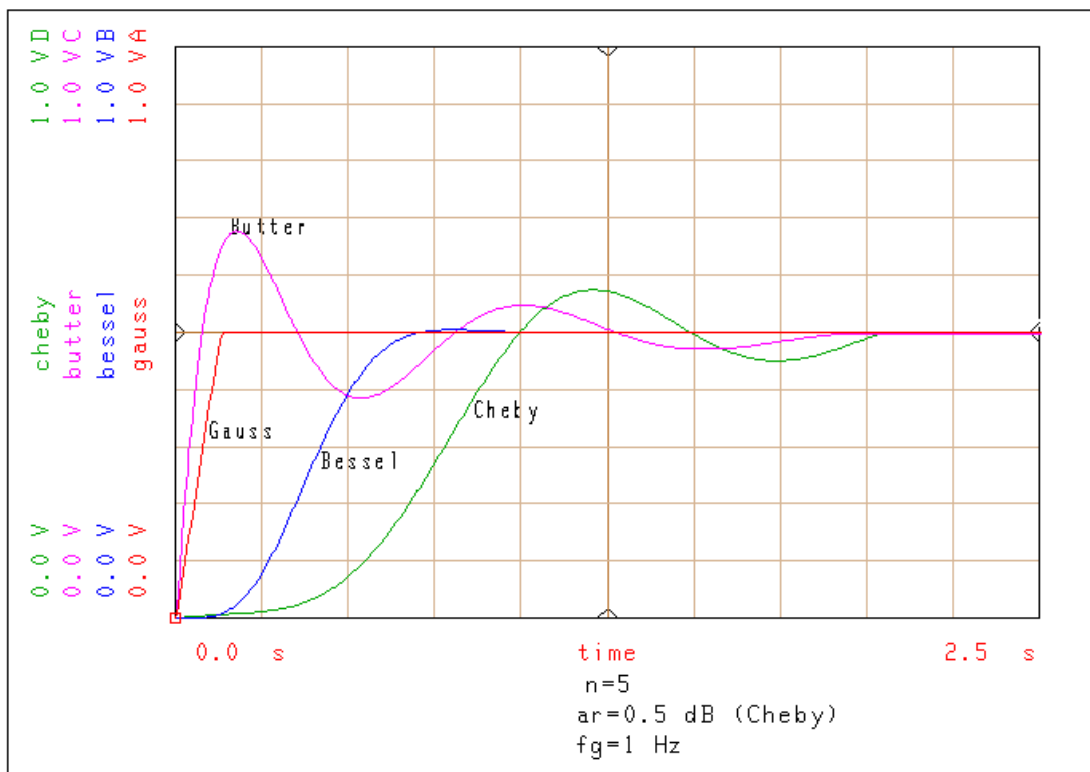
Filtervergleich Amplitudengang



Filtervergleich Amplitudengang



Filtervergleich Gruppenlaufzeit



Filtervergleich Sprungangwort



## 9. Skalierung, Transformationen

### 9.1 Impedanz

Alle Impedanzen mit gleichem Faktor multiplizieren.

$$R_0 \cdot a = Z_{\text{Elk}} \cdot a = j\omega L_k a = a \frac{1}{j\omega C_k}$$

$$L_b = \frac{R_b}{R_a} L_a \quad C_b = \frac{R_a}{R_b} C_a$$

### 9.2 Frequenz

Alle Elementimpedanzen müssen bei verschiedenen Grenzfrequenzen konstant bleiben.

$$\omega_{c_a} L_a = \omega_{c_b} L_b \quad \omega_{c_a} C_a = \omega_{c_b} C_b$$

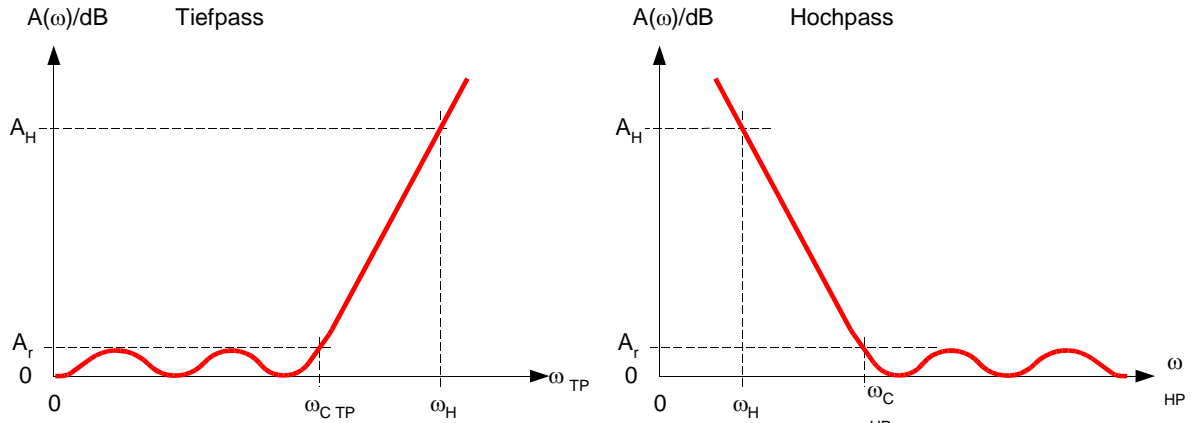
$$L_b = L_a \frac{\omega_{c_a}}{\omega_{c_b}} \quad C_b = C_a \frac{\omega_{c_a}}{\omega_{c_b}}$$

Frequenz- und Impedanztransformation kombiniert:

$$L_b = L_a \frac{R_b}{R_a} \frac{\omega_{c_a}}{\omega_{c_b}} \quad C_b = C_a \frac{R_a}{R_b} \frac{\omega_{c_a}}{\omega_{c_b}}$$



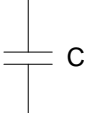
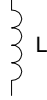
### 9.3 Tiefpass - Hochpass-Transformation

$$S_{HP} = \frac{1}{S_{TP}}$$

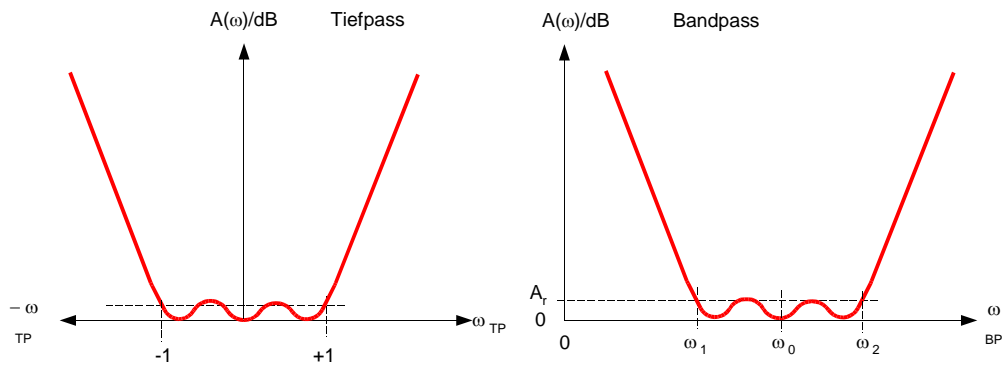


$$\omega_{C_{TP}} = \omega_{C_{HP}}$$

$$\omega_{TP} = -\frac{\omega_{C_{TP}} \cdot \omega_{C_{HP}}}{\omega_{HP}} = -\frac{\omega_{C_{HP}}^2}{\omega_{HP}}$$

Tiefpass	Hochpass
$R_k = g_k \cdot R_0$	$R_k = g_k \cdot R_0$
$L$  $L_{k_{TP}} = g_k \cdot R_0 \frac{1}{\omega_{C_{TP}}}$	$C$  $C_{k_{HP}} = \frac{1}{\omega_{C_{TP}} \omega_{C_{HP}} L_{k_{TP}}} = \frac{1}{\omega_{C_{HP}} R_0 \cdot g_k}$
$C$  $C_{k_{TP}} = g_k \frac{1}{R_0 \cdot \omega_{C_{TP}}}$	$L$  $L_{k_{HP}} = \frac{1}{\omega_{C_{TP}} \omega_{C_{HP}} C_{k_{TP}}} = \frac{R_0}{\omega_{C_{HP}} \cdot g_k}$
<b>Berechnung von A, n:</b> $\frac{\omega_{TP}}{\omega_{C_{TP}}}$	$\frac{\omega_{C_{HP}}}{\omega_{HP}}$

### 9.4 Tiefpass - Bandpass-Transformation



$\omega_{TP}$	$\omega_{BP}$
$-\infty$	$0$
$-1$	$\omega_1$
$0$	$\omega_0$
$+1$	$\omega_2$
$+\infty$	$+\infty$

$$S_{TP} = k \left( S_{BP} + \frac{1}{S_{BP}} \right)$$

$$\frac{\omega_{TP}}{\omega_{c\ TP}} = k \left( \frac{\omega_{BP}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{BP}} \right)$$

$$-1 = k \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right)$$

$$+1 = k \left( \frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right)$$

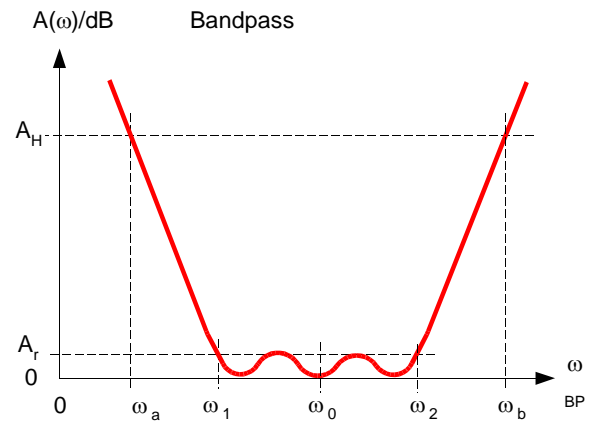
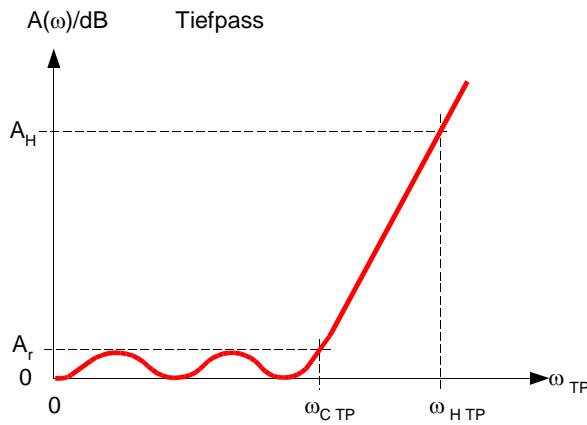
Die Lösung dieser Gleichungen:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \qquad k = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{1}{W} \qquad W = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{B}{\omega_0}$$

w = Normierte Bandbreite, Fractional Bandwidth

Aus obigen Gleichungen:


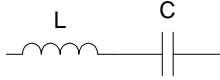
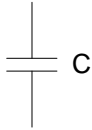
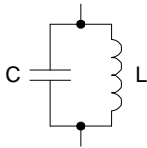
$$\frac{\omega_{TP}}{\omega_{c\ TP}} = \frac{1}{W} \left( \frac{\omega_{BP}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{BP}} \right)$$



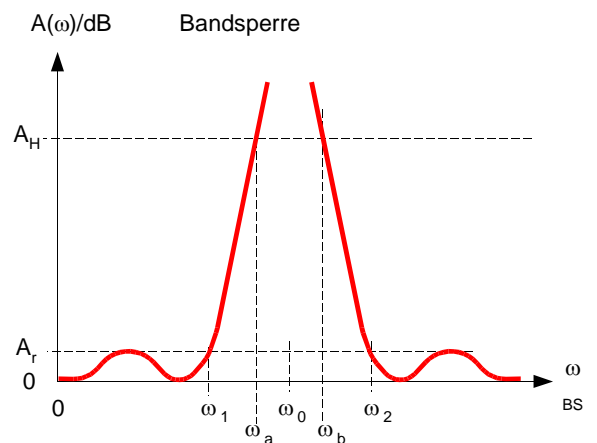
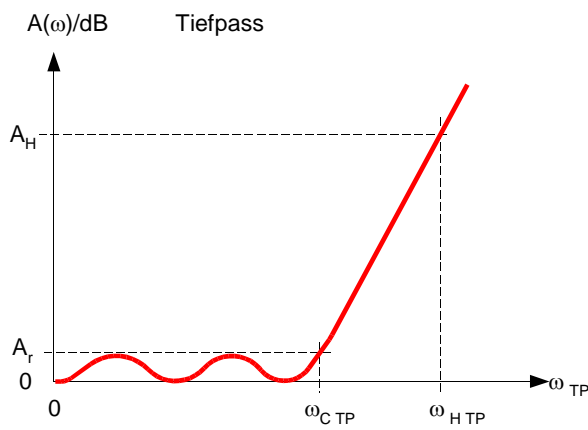
$$\frac{\omega_{TP}}{\omega_{CTP}} = \frac{1}{W} \left( \frac{\omega_{BP}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{BP}} \right)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

$$W = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$$

Tiefpass	Bandpass
$R_k = g_k \cdot R_0$	$R_k = g_k \cdot R_0$
$L_{kTP} = g_k \cdot R_0 \frac{1}{\omega_{CTP}}$ 	 $C_{kBP} = \frac{W}{\omega_0 \cdot R_0 \cdot g_k} \quad L_{kBP} = \frac{R_0 \cdot g_k}{\omega_0 \cdot W}$
 $C_{kTP} = g_k \frac{1}{R_0 \cdot \omega_{CTP}}$	 $C_{kBP} = \frac{g_k}{\omega_0 \cdot W \cdot R_0} \quad L_{kBP} = \frac{W \cdot R_0}{\omega_0 \cdot g_k}$
Berechnung von n:	
$\frac{\omega_{HTP}}{\omega_{CTP}}$	$\frac{1}{W} \left  \left( \frac{\omega_b}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_b} \right) \right  = \frac{1}{W} \left  \left( \frac{\omega_a}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_a} \right) \right $
Berechnung von A:	
$\frac{\omega_{TP}}{\omega_{CTP}}$	$\frac{1}{W} \left  \left( \frac{\omega_{BP}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{BP}} \right) \right $

### 9.5 Tiefpass - Bandstop-Transformation


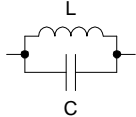
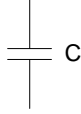



$$S_{TP} = \frac{1}{k \left( S_{BS} + \frac{1}{S_{BS}} \right)}$$

$$\frac{\omega_{TP}}{\omega_{CTP}} = \frac{W}{\frac{\omega_{BS}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{BS}}}$$

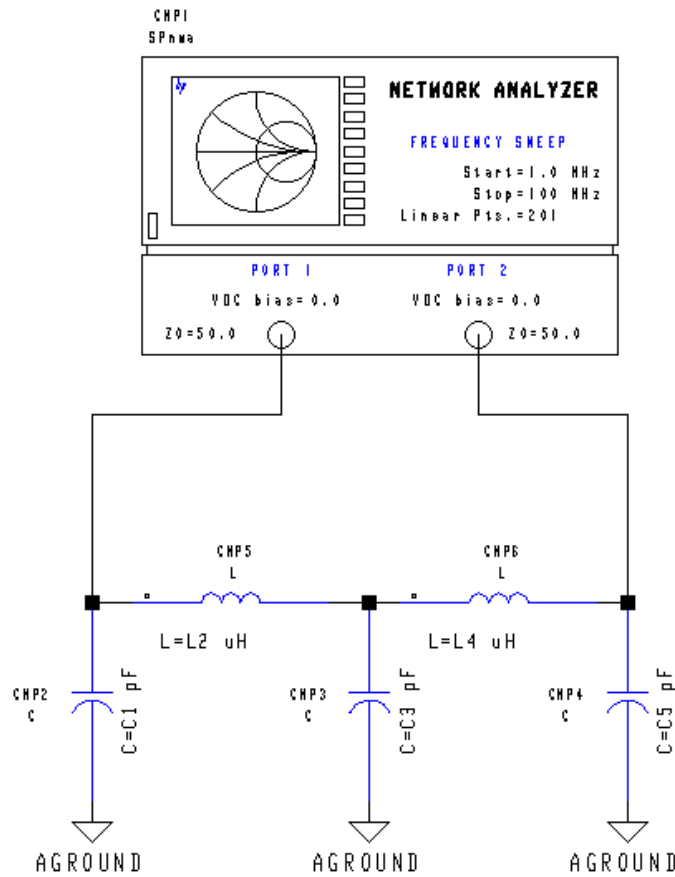
$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

$$W = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$$

Tiefpass	Bandstop
$R_k = g_k \cdot R_0$	$R_k = g_k \cdot R_0$
 $L_{kTP} = g_k \cdot R_0 \frac{1}{\omega_{CTP}}$	 $C_{kBS} = \frac{1}{W \cdot \omega_0 \cdot R_0 \cdot g_k}$ $L_{kBS} = \frac{W \cdot R_0 \cdot g_k}{\omega_0}$
 $C_{kTP} = g_k \frac{1}{R_0 \cdot \omega_{CTP}}$	 $C_{kBS} = \frac{W \cdot g_k}{\omega_0 \cdot R_0}$ $L_{kBS} = \frac{R_0}{W \cdot \omega_0 \cdot g_k}$
Berechnung von n: $\frac{\omega_{HTP}}{\omega_{CTP}}$	$\frac{W}{\left  \frac{\omega_b - \omega_0}{\omega_0 - \omega_b} \right } = \frac{W}{\left  \frac{\omega_a - \omega_0}{\omega_0 - \omega_a} \right }$
Berechnung von A: $\frac{\omega_{TP}}{\omega_{CTP}}$	$\frac{W}{\left  \frac{\omega_{BS} - \omega_0}{\omega_0 - \omega_{BS}} \right }$

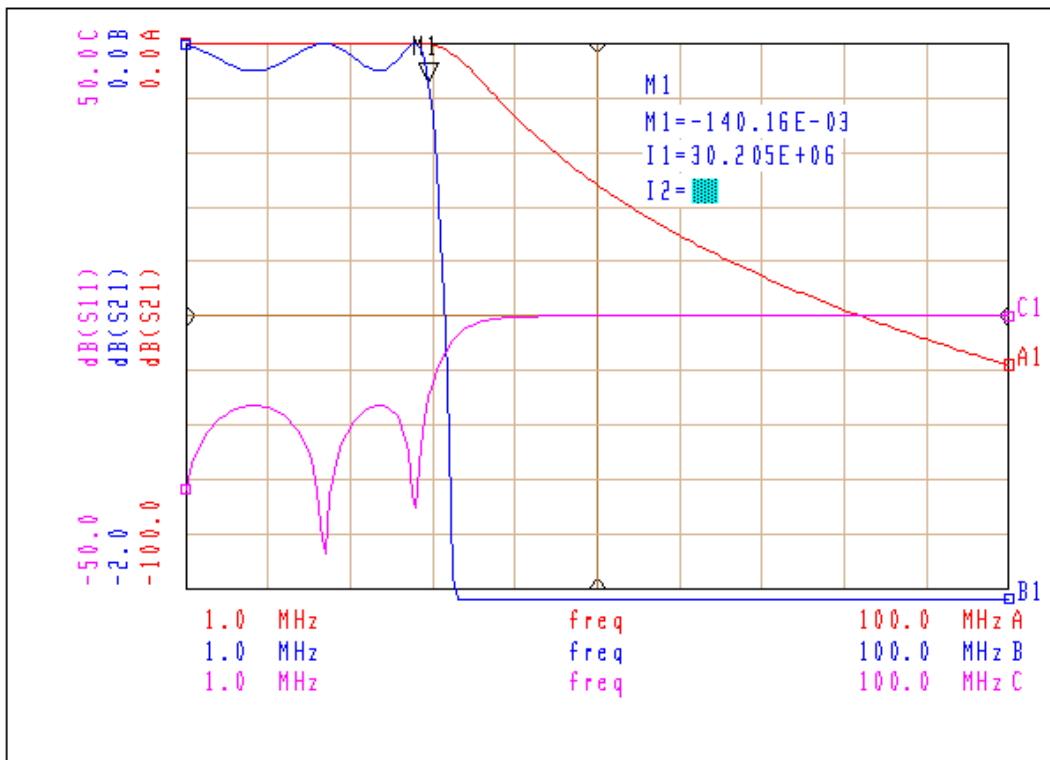
Beispiel 9.1: Dimensionieren Sie einen Tiefpass mit folgenden Eigenschaften:

Chebyshev,  $Z_0 = 50 \Omega$ ,  $n = 5$ ,  $A_r = 0.1 \text{ dB}$ ,  $f_g = 30 \text{ MHz}$



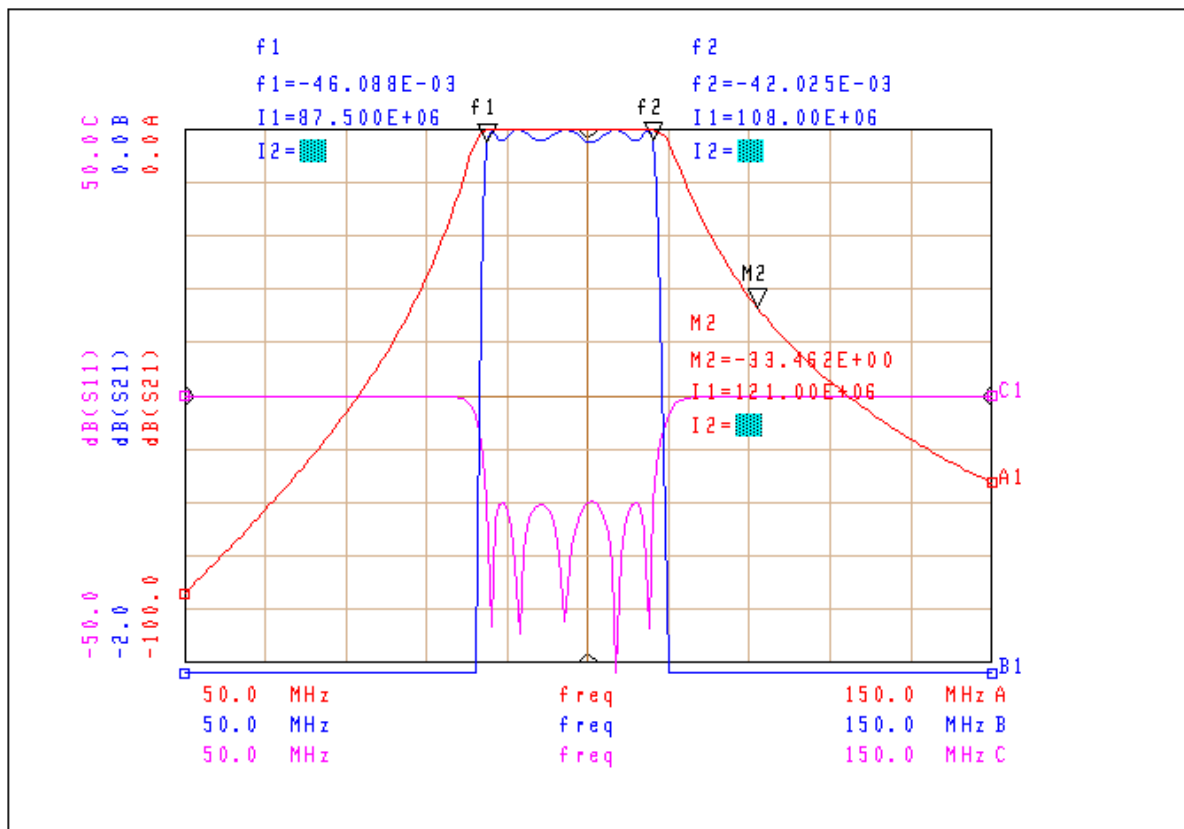
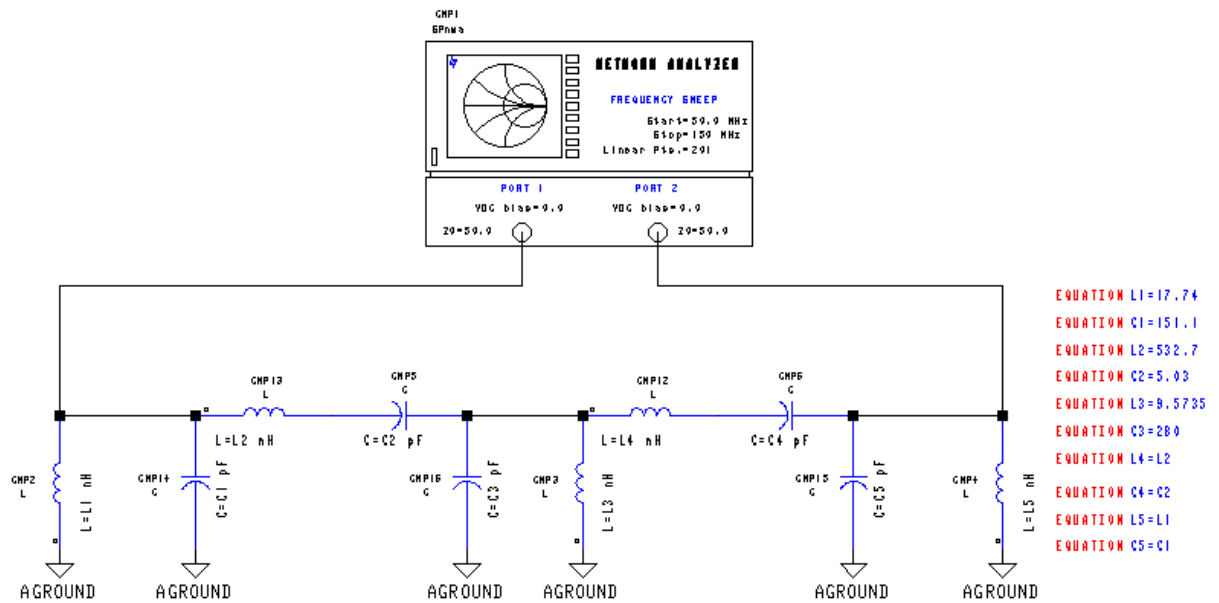
Loesung:  $g_0 = g_6 = 1$   
 $g_1 = g_5 = 1.1468$   
 $g_2 = g_4 = 1.3713$   
 $g_3 = 1.9751$

EQUATION C1=121.6  
 EQUATION L2=0.364  
 EQUATION C3=209.5  
 EQUATION L4=L2  
 EQUATION C5=C1



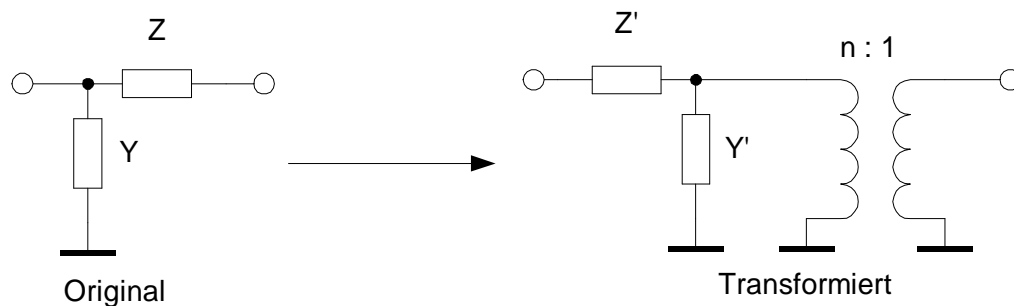
Beispiel 9.2: Dimensionieren Sie einen Bandpass mit folgenden Eigenschaften:

Chebyshev,  $n = 5$ ,  $Z_0 = 50 \Omega$ ,  $R_{L_{min}} = 20 \text{ dB}$ ,  $f_1 = 87.5 \text{ MHz}$ ,  $f_2 = 108 \text{ MHz}$



## 10. Netzwerktransformationen (Norton-Transformationen)

Lastimpedanzanpassung und Aenderung der Elementwerte können über Netzwerktransformationen vorgenommen werden. Dadurch können Elementwerte die kaum realisierbar sind, in besser realisierbare Strukturen transformiert werden. Diese Transformationen wurden erstmals von E.L. Norton beschrieben und werden deshalb allgemein als Norton-Transformationen bezeichnet.



Wir beschreiben beide Netzwerke mit den A-Parametern und setzen die resultierenden Parameter gleich:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & Z' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 1/n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & Z \\ Y & 1+ZY \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n(1+Y'Z') & Z'/n \\ nY' & 1/n \end{bmatrix}$$

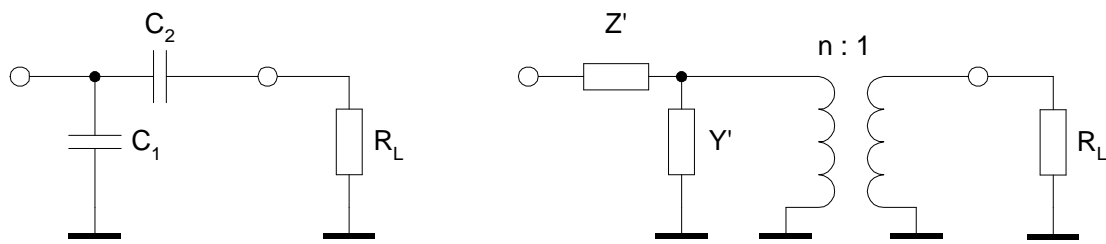
Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A_{12} = A'_{12} &\rightarrow Z = Z'/n &\rightarrow Z' = nZ \\ A_{21} = A'_{21} &\rightarrow Y = nY' &\rightarrow Y' = Y/n \\ A_{22} = A'_{22} &\rightarrow 1+ZY = 1/n &\rightarrow n = \frac{1}{1+ZY} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z' &= nZ \\ Y' &= Y/n \\ n &= \frac{1}{1+ZY} \end{aligned}$$



Besteht das Originalnetzwerk aus Kapazitäten, erhalten wir:



$$Y = sC_1$$

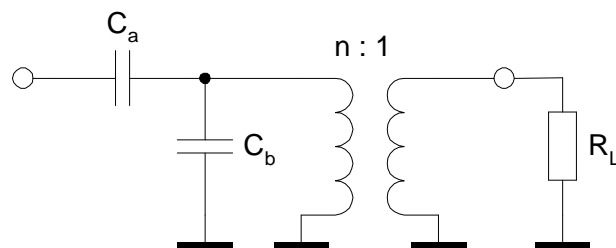
$$Z = \frac{1}{sC_2}$$

$$n = \frac{1}{1 + sC_1 \frac{1}{sC_2}} = \frac{1}{1 + \frac{C_1}{C_2}} = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

$$Z' = nZ = n \frac{1}{sC_2} = \frac{1}{s(C_1 + C_2)}$$

$$Y' = \frac{Y}{n} = \frac{sC_1}{n} = \frac{sC_1(C_1 + C_2)}{C_2}$$

Damit wird das transformierte Netzwerk:



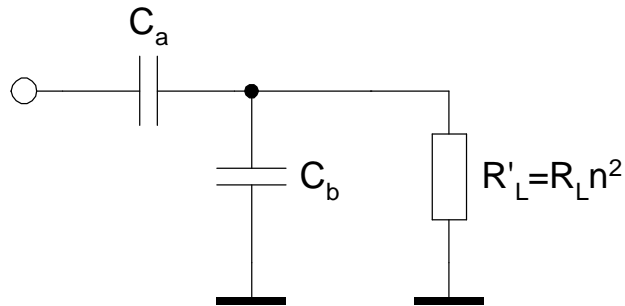
Mit

$$n = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

$$C_a = \frac{C_2}{n}$$

$$C_b = \frac{C_1}{n}$$

Der ideale Transformator kann eliminiert werden, wenn alle Impedanzen auf der Sekundärseite mit  $n^2$  multipliziert werden.

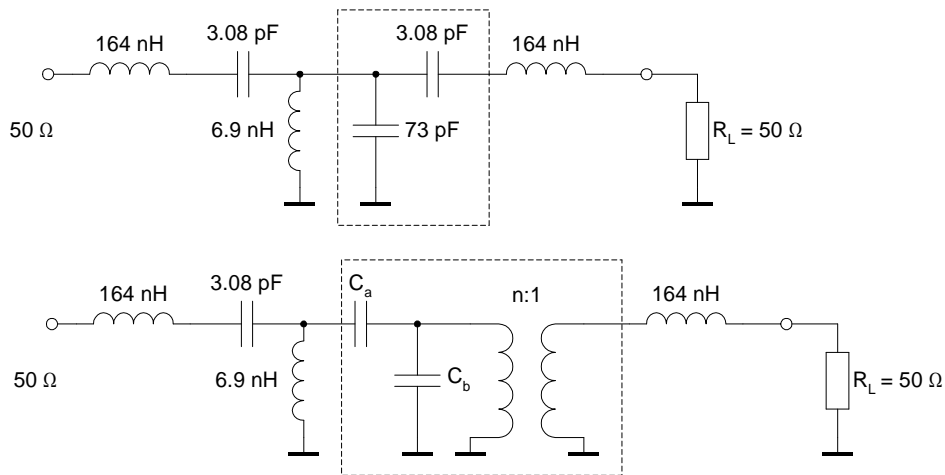


Beispiel 6.1:

Gegeben sei ein Bandpass:

Chebyshev

$n = 3$   $A_r = 0.1\text{dB}$   $f_1 = 200\text{ MHz}$   $f_2 = 250\text{ MHz}$   $Z_0 = 50\ \Omega$



$$n := \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

$$n = 0.04$$

$$C_a := \frac{C_2}{n}$$

$$C_a = 76.08 \cdot \text{pF}$$

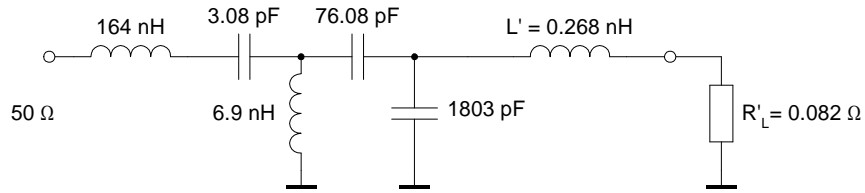
$$C_b := \frac{C_1}{n}$$

$$C_b = 1.803 \cdot 10^3 \cdot \text{pF}$$

Elimination des Trafos:

$$L' = n^2 L = 0.2688 \text{ nH}$$

$$R'_L = n^2 R_L = 0.082 \text{ } \Omega$$



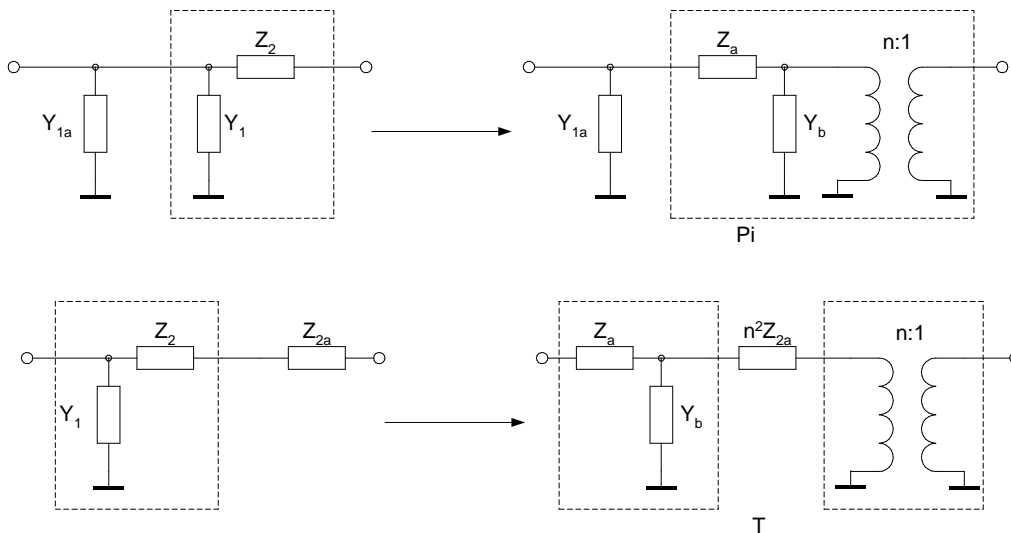
Wenn die Transformationsgleichungen untersucht werden, kann festgestellt werden, dass alle Elemente des gleichen Typs sein müssen:

$$n = \frac{1}{1 + ZY}$$

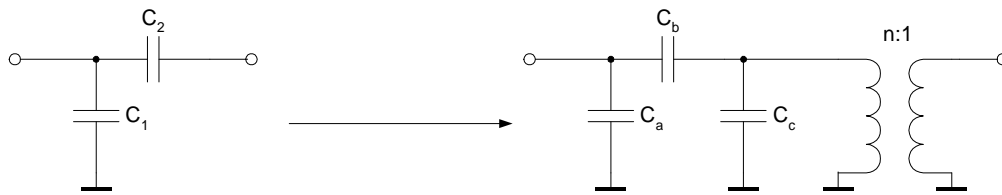
n muss frequenzunabhängig sein, also muss s in ZY kürzbar sein. Da die transformierten Elemente mit n verknüpft sind, müssen beide Netzwerke, das Original und das transformierte, den gleichen Elementtyp aufweisen.

Die Transformation kann zur Impedanzanpassung auch aufgeteilt werden, wenn spezielle Übertragungsverhältnisse n gewünscht werden. Die Grenzen von n sind gegeben durch:

$$\frac{1}{1 + ZY} \leq n \leq 1$$



Bei gegebenen  $n$ ,  $C_1$  und  $C_2$  erhält man:



$$C = C_2 \frac{1-n}{n}$$

$$C_a = C_1 - C$$

$$C_b = \frac{C_2}{n}$$

$$C_c = \frac{C}{n}$$

Beispiel 6.2:

Die Schaltung aus Beispiel 6.1 soll so transformiert werden, dass  $R'_L = 5 \Omega$  wird.

$$C_1 := 73 \cdot \text{pF} \quad C_2 := 3.08 \cdot \text{pF} \quad R_{L_t} := 5 \cdot \Omega \quad R_L := 50 \cdot \Omega \quad L := 0.164 \cdot \mu\text{H}$$

$$n := \sqrt{\frac{R_{L_t}}{R_L}} \quad n = 0.316$$

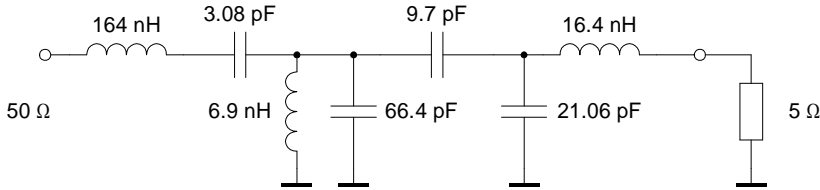
$$C := C_2 \frac{1-n}{n} \quad C_2 = 3.08 \cdot \text{pF}$$

$$C_a := C_1 - C \quad C_a = 66.34 \cdot \text{pF}$$

$$C_b := \frac{C_2}{n} \quad C_b = 9.74 \cdot \text{pF}$$

$$C_c := \frac{C}{n} \quad C_c = 21.06 \cdot \text{pF}$$

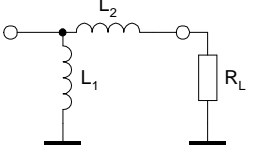
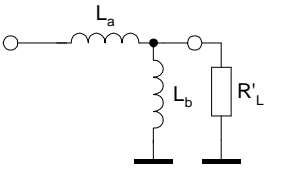
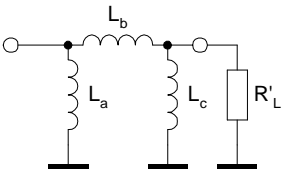
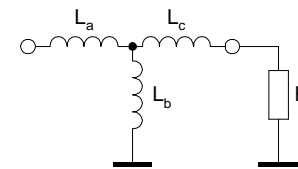
$$L_t := n^2 \cdot L \quad L_t = 0.016 \cdot \mu\text{H}$$

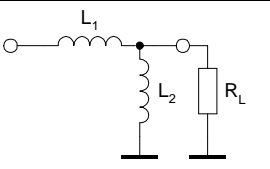
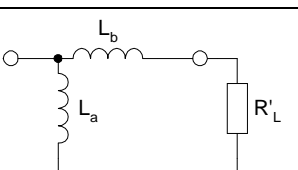
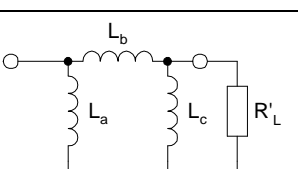
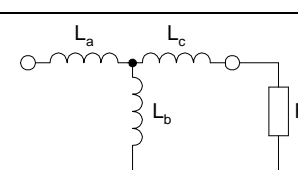


Auf die gleiche Art und Weise können die anderen möglichen Transformationstopologien ebenfalls hergeleitet werden.

### Zusammenstellung der Norton-Transformationen

Original Netzwerk	Transformiertes Netzwerk	Transformationsgleichungen
		$\left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)^2 R_L \leq R'_L \leq R_L \quad R'_L = n^2 R_L$
		$n = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$ $C_a = \frac{C_2}{n} \quad C_b = \frac{C_1}{n}$
		$C = C_2 \frac{1-n}{n}$ $C_a = C_1 - C$ $C_b = \frac{C_2}{n} \quad C_c = \frac{C}{n}$
		$C = C_1 \frac{n}{1-n}$ $C_a = \frac{C}{n}$ $C_b = \frac{C_1}{n} \quad C_c = \frac{CC_2}{n^2(C - C_2)}$
		$R_L \leq R'_L \leq \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1}\right)^2 R_L \quad R'_L = n^2 R_L$
		$n = \frac{C_1 + C_2}{C_1}$ $C_a = \frac{C_2}{n} \quad C_b = \frac{C_1}{n}$
		$C = (n-1)C_1$ $C_a = \frac{C}{n}$ $C_b = \frac{C_1}{n} \quad C_c = \frac{C_2 - C}{n^2}$
		$C = \frac{C_2}{n-1}$ $C_a = \frac{CC_1}{C - C_1}$ $C_b = \frac{C_2}{n} \quad C_c = \frac{C}{n}$

Original Netzwerk	Transformiertes Netzwerk	Transformationsgleichungen
		$\left(\frac{L_2}{L_1 + L_2}\right)^2 R_L \leq R'_L \leq R_L \quad R'_L = n^2 R_L$
		$n = \frac{L_1}{L_1 + L_2}$ $L_a = nL_2 \quad L_b = nL_1$
		$L = L_2 \frac{n}{1-n}$ $L_a = \frac{LL_1}{L-L_1}$ $L_b = nL_2 \quad L_c = nL$
		$L = L_1 \frac{1-n}{n}$ $L_a = nL$ $L_b = nL_1 \quad L_c = n^2(L_2 - L)$

		$R_L \leq R'_L \leq \left(\frac{L_1 + L_2}{L_2}\right)^2 R_L \quad R'_L = n^2 R_L$
		$n = \frac{L_1 + L_2}{L_2}$ $L_a = nL_2 \quad L_b = nL_1$
		$L = \frac{L_1}{n-1}$ $L_a = nL$ $L_b = nL_1 \quad L_c = \frac{n^2 L L_2}{L - L_2}$
		$L = (n-1)L_2$ $L_a = L_1 - L$ $L_b = nL_2 \quad L_c = nL$

**Literatur zu Filter**

- Daniels, R.: Approximation Methods for Electronic Filter Design, McGraw-Hill, N.Y., 1974, 0-07-015308-6
- Matthaei et al.: Microwave Filters, Impedance-Matching Networks, and Coupling Structures, Artech House, Inc., MA, 1980 0-89006-099-1
- Saal, R.: Handbuch zum Filterentwurf Hüthig, Heidelberg, 1988 3-7785-1558-6
- Williams, Taylor: Electronic Filter Design Handbook, McGraw-Hill, N.Y., 1988, 0-07-070434-1