

Vorlesung Elektrische Energieversorgung I

## **Skript Freileitungen**

(Korrigierte Ausgabe 2005)

Bearbeiter: Prof. B.R.Oswald

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ausführungsformen</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Einphasenleitung</b>	<b>10</b>
2.1	Ersatzschaltung mit verteilten Parametern*	10
2.2	Ersatzschaltung mit konzentrierten Parametern	13
<b>3</b>	<b>Drehstrom-Einfachleitung</b>	<b>16</b>
3.1	Induktive Verkettung	16
3.2	Kapazitive Verkettung	18
3.3	Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten	22
<b>4</b>	<b>Drehstrom-Doppelleitung</b>	<b>26</b>
4.1	Induktive Verkettung	26
4.2	Kapazitive Verkettung	27
4.3	Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten	28
<b>5</b>	<b>Berechnung der Leitungsparameter</b>	<b>33</b>
5.1	Schleifenimpedanzen	33
5.2	Potentialkoeffizienten	37
5.3	Impedanzen der Symmetrischen Komponenten	39
5.3.1	Einfachleitung	39
5.3.2	Doppelleitung*	40
5.4	Admittanzen der Symmetrischen Komponenten	42
5.4.1	Einfachleitung	42
5.4.2	Doppelleitung*	44
<b>6</b>	<b>Betriebsverhalten</b>	<b>46</b>
6.1	Spannungsabfall	46
6.2	Verluste, Blindstrombedarf, natürliche Leistung	49
6.3	Leerlauf und Kurzschluß	51
6.4	Kapazitiver Erdschlußstrom	52
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>55</b>
7.1	Verdrillungsschemata	55
7.1.1	Verdrillung $\alpha_1$	55
7.1.2	Verdrillung $\alpha_2$	55
7.1.3	Verdrillung $\beta$	56
7.1.4	Verdrillung $\gamma$	57
7.2	Modifizierung der Parameter der verdrillten Doppelleitung*	58
7.3	CARSONsche Reihen*	60
7.4	Daten von Freileitungsseilen	61
7.5	Elektrische Daten von Freileitungen (Richtwerte)	63

Hinweis: Das Skript ersetzt nicht die Vorlesung und umgekehrt. Im Skript sind einige Ausführungen, insbesondere mathematische Ableitungen ausführlicher dargestellt, während in der Vorlesung mehr Wert auf das Verständnis gelegt wird. Die mit einem \* gekennzeichneten Kapitel sind zur Vertiefung gedacht.

## 1 Ausführungsformen

Das Bild der Freileitung wird durch ihre Nennspannung geprägt. Die Wahl der Übertragungsspannung ist eine Frage der Kostenoptimierung der Übertragung. In Deutschland sind bis auf einige Ausnahmen die in Tabelle 1.1 angegebenen Nennspannungen für Netze üblich. Dabei unterscheidet man zunächst zwischen der *Niederspannungsebene* ( $U_n < 1000 \text{ V}$ ) und der *Hochspannungsebene* ( $U_n > 1 \text{ kV}$ ). Im Sprachgebrauch ist es üblich, die Hochspannungsebene noch in *Mittelspannungsebene* ( $U_n < 110 \text{ kV}$ ), *Hochspannungsebene* ( $110 \text{ kV} \leq U_n \leq 400 \text{ kV}$ ) und *Höchstspannungsebene* ( $U_n > 400 \text{ kV}$ ) zu unterteilen.

Tabelle 1.1: Übliche Netzennennspannungen in Deutschland

Niederspannung	Mittelspannung	Hochspannung
<u>230 / 400 V</u> 500 V 660 V	6 kV <u>10 kV</u> <u>20 kV</u> 30 kV	<u>110 kV</u> (220 kV) <u>380 kV</u>

Die Nennspannungen sind historisch gewachsen. Dabei sind relativ viele Spannungsebenen entstanden, die teilweise auch noch in Betrieb sind. Aus wirtschaftlichen Gründen (minimale Anzahl von Transformatoren) sollte jedoch die Spannungsstufung der Netze so sein, daß der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Spannungsebenen nicht kleiner als zwei ist. Die in Tabelle 1.1 unterstrichenen Werte sind im Einklang mit der internationalen IEC-Norm IEC 38, die unverändert in die Deutsche Norm übernommen wurde (DIN IEC 38). Nach dieser Norm wurde bzw. wird die Niederspannungsebene weltweit von 220/380 V bzw. 240/415 V auf 230/400 V umgestellt. Die 220-kV-Spannungsebene wird aus den erwähnten wirtschaftlichen Gründen mehr und mehr zurückgebaut.

Spannungen über 200 kV sind international nicht genormt. Höhere Spannungen als 400 kV sind für die Übertragungsaufgaben im europäischen Verbundnetz (UCPTE-Netz) auch perspektivisch nicht erforderlich. Im Ausland sind für größere Übertragungsstrecken auch 500-kV- und 750-kV-Freileitungen in Betrieb. In Rußland befindet sich eine 1500-kV-Leitung in der Erprobung.

Mit der Erhöhung der Übertragungsspannung wächst bei gleichem Strom und damit gleichen Stromwärmeverlusten und gleichem Spannungsabfall die übertragbare Leistung. Die relativen auf die Übertragungsleistung bezogenen Verluste und der relative auf die Übertragungsspannung bezogene Spannungsabfall werden somit kleiner. Die noch wirtschaftliche und technisch sinnvolle Leitungslänge wird größer.

Diesen Vorteilen der Erhöhung der Übertragungsspannung stehen die mit ihr steigenden Kosten der Freileitung gegenüber. Höhere Spannungen erfordern größere Isolationsabstände und besondere Maßnahmen (Bündelleiter<sup>1)</sup>) gegen die Koronaerscheinungen. Die Freileitungsgeometrie und damit der Trassenbedarf wachsen. Technisch setzen die Koronaentladungen der Steigerung der Übertragungsspannung eine Grenze. Damit wird auch die wirtschaftlich übertragbare Leistung über große Entfernungen (die sogenannte natürliche Leistung), die nur vom Quadrat der Spannung und dem Wellenwiderstand (also von der Leitungsgeometrie und nicht von der Leitungslänge) abhängt, begrenzt. Zusammen mit dem Strom bestimmt die Leistungslänge den Spannungsabfall und den Phasenwinkel zwischen den Spannungen am Ende und Anfang der Leitung, den sogenannten Stabilitätswinkel. Da der Spannungsabfall, insbesondere bei Lastabwurf am Ende der Leitung (der Spannungsabfall wird dann negativ), und der Stabilitätswinkel bestimmte Werte nicht

<sup>1)</sup> Die hier vorweggenommenen Begriffe werden im Skript erläutert.

überschreiten dürfen, beschränken sie die Reichweite der Drehstromfreileitung auf etwa 1000 km. Für größere Übertragungsentfernungen kommen dann nur Gleichspannungsübertragungen (HGÜ) in Frage.

Die Geschichte der Drehstromfreileitung beginnt 1891 mit der ersten Fernübertragung von Lauffen am Neckar über 175 km nach Frankfurt am Main anlässlich einer internationalen elektrotechnischen Ausstellung, auf der die Überlegenheit der Drehstromübertragung demonstriert werden sollte. Mit einer Spannung von 15 kV wurde eine Leistung von 300 PS (200 kW) auf einer an 3282 Holzmasten mit Kappenisolatoren befestigten 12,5 mm<sup>2</sup> Kupferleitung mit einem Wirkungsgrad von 75% übertragen. Mit der Erfindung des Hängeisolators im Jahre 1907 in den USA war der Weg zu höheren Übertragungsspannungen frei. 1912 wird mit der Leitung Lauchhammer-Riesa (56 km) in Sachsen die erste 110-kV-Leitung Europas in Betrieb genommen. Die erste 220-kV-Leitung in der Bundesrepublik Deutschland, die Rheinleitung Brauweiler-Hoheneck (Nord-Süd-Verbindung) geht 1929 in Betrieb. Die Leitung wurde weit vorausschauend bereits für eine spätere Umstellung auf 380 kV bemessen und zunächst mit 6 Kupferhohlseilen von je 42 mm Durchmesser belegt. 1952 wird die erste 380-kV-Leitung in Schweden und 1958 mit der Leitung Rommerskirchen-Hoheneck die erste 380-kV-Leitung in der BRD unter Spannung gesetzt. Das jetzige gesamtdeutsche Leitungsnetz umfaßt etwa 16000 km 380 kV- und 22500 km 220-kV-Leitungen. Einen Überblick über die historische Steigerung der Übertragungsspannung gibt Bild 1.1.

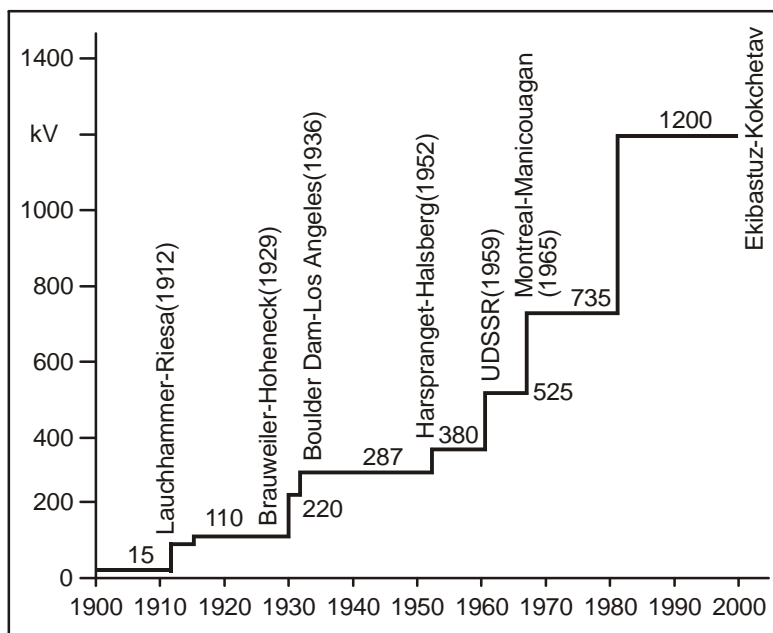


Bild 1.1: Entwicklung der Übertragungsspannung von Drehstromleitungen

Typische Mastbilder von Drehstromfreileitungen zeigt das Bild 1.2. In der Mittelspannungsebene werden heute vorwiegend Stahlbetonmasten verwendet, während in den höheren Spannungsebenen ausschließlich Stahlgittermasten eingesetzt werden. Beim Donaumast ist die Leitung in zwei Ebenen angeordnet, wodurch eine geringere Trassenbreite als beim Einebenenmast erforderlich ist.

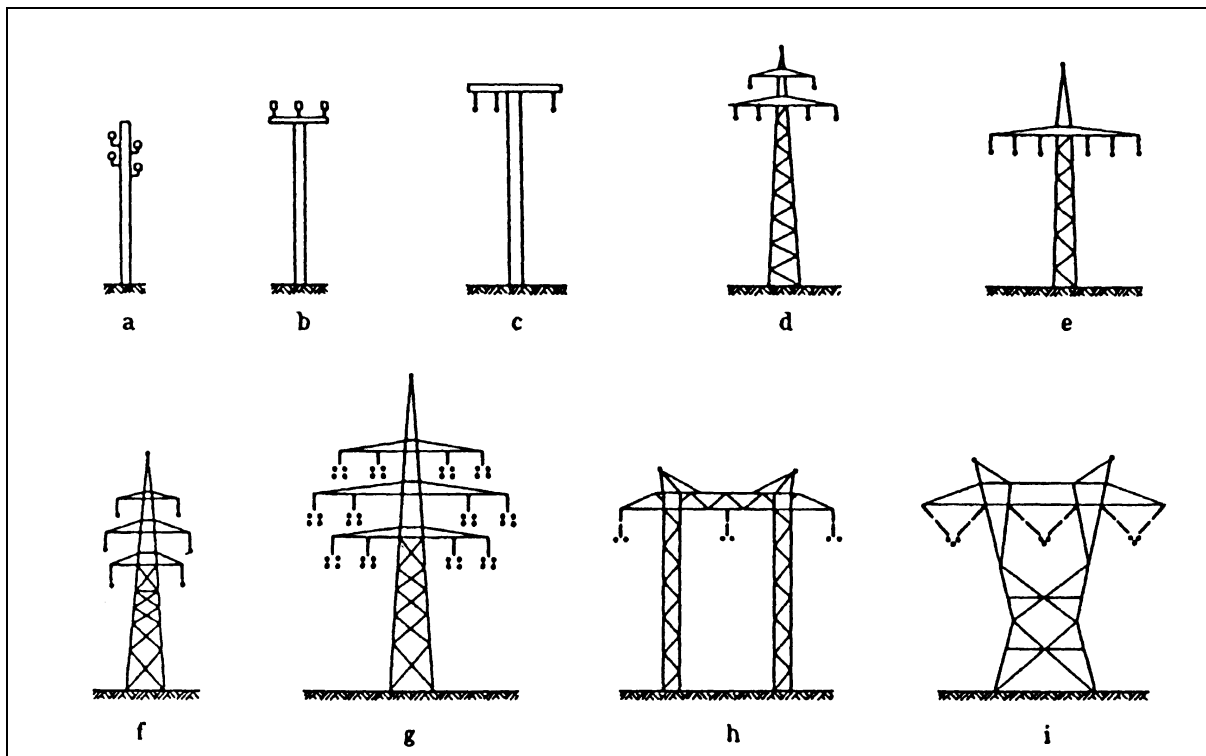


Bild 1.2: Mastbilder von Drehstrom-Freileitungen

a) Niederspannungsleitung (Holzmast) mit Nulleiter; b) Mittelspannungsleitung mit Stützenisolatoren; c) Betonmastleitung (Mittelspannung bis 110 kV); d) Donaumastbild (110 bis 380 kV und bis 1150 kV möglich); e) Einebenenmastbild (110 kV bis 220 kV); f) Tonnenmastbild (110 kV bis 1150 kV); g) Mehrfachleitung hier für vier Stromkreise 380 kV; h) Portalast, u.U. abgespannte Konstruktion (110 kV bis 750 kV); i) Y-Mastbild (110 kV bis 1500 kV)

Eine Vorstellung von der normalen Mastgeometrie vermittelt das Bild 1.3.

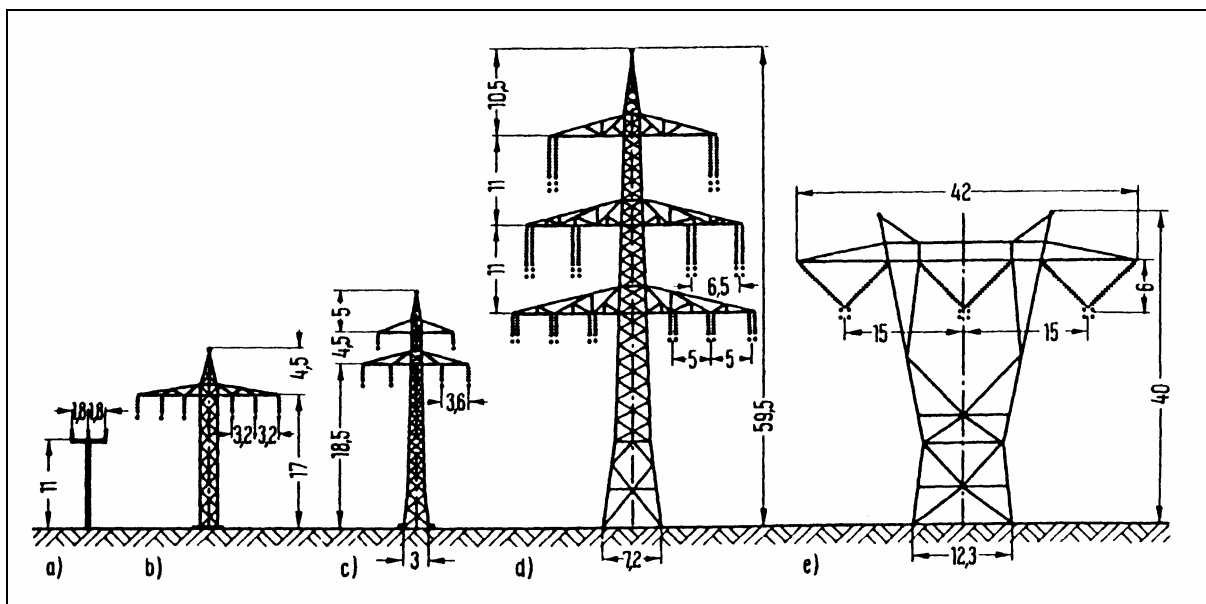


Bild 1.3: Größenvergleich von Freileitungsmasten; a) 20-kV-Tragmast mit Stützenisolatoren; b) 110-kV-Einebenen-Tragmast; c) 110-kV-Tragmast (Donautyp); d) Tragmast mit 2x220-kV-Zweierbündelleitung und 2x380-kV-Viererbündelleitung; e) 735-kV-Tragmast (Kanada) mit V-Ketten und Viererbündelleitung

Wesentlich größere Masthöhen und Spannweiten sind beim Kreuzen von Flüssen, Fjorden und Meerengen erforderlich. Die längste Spannweite weist mit 4888 m die

275-kV-Leitung über den Sognefjord in Norwegen auf, während die Freileitungsmasten zur Überquerung der Straße von Messina 205 m und 224 m messen und 3627 m auseinanderstehen.

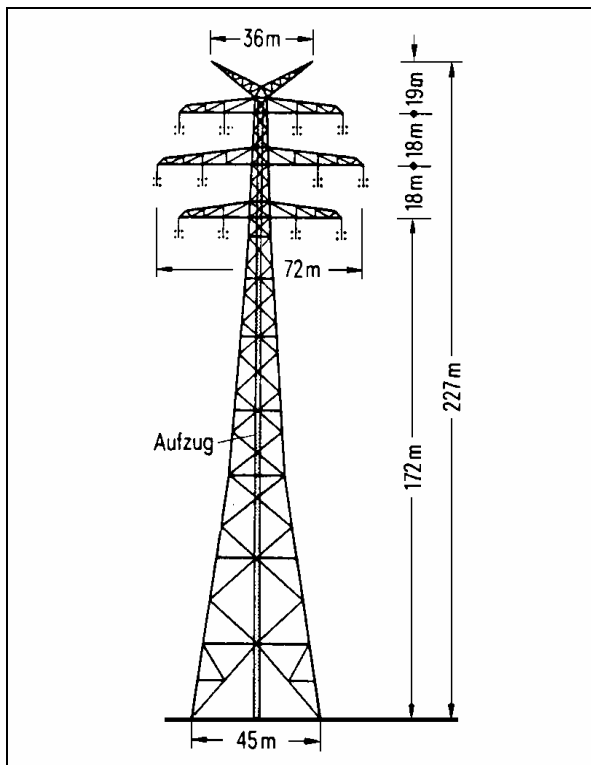


Bild 1.4: Hauptabmessungen des Tragmastes der Elbekreuzung bei Stade

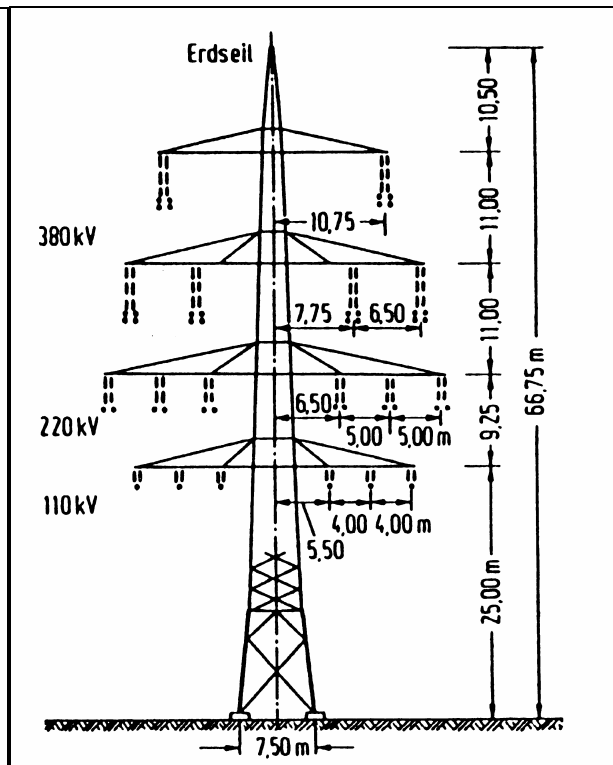


Bild 1.5: Freileitung mit 6 Stromkreisen bestehend aus 380-kV-Doppelleitung (oben) 220-kV-Doppelleitung (mitte) 110-kV-Doppelleitung (unten)

Die Tragmaste der 380-kV-Elbekreuzung bei Stade haben eine Höhe von 227 m (Bild 1.4) und garantieren eine Durchfahrtshöhe von 80 m bei 1200 m Spannweite. Mittelspannungsleitungen werden generell als *Einfachleitung* (man spricht auch von einem Stromkreis) aufgebaut. In der 110-, 220- und 380-kV-Ebene sind aus Gründen der Versorgungszuverlässigkeit und zur besseren Trassenausnutzung *Doppelleitungen* üblich. In Ballungsgebieten und in der Nähe von Umspannwerken werden Mehrfachleitungen mit bis zu 6 Stromkreisen auf einem Gestänge (Mast) geführt (Bild 1.5).

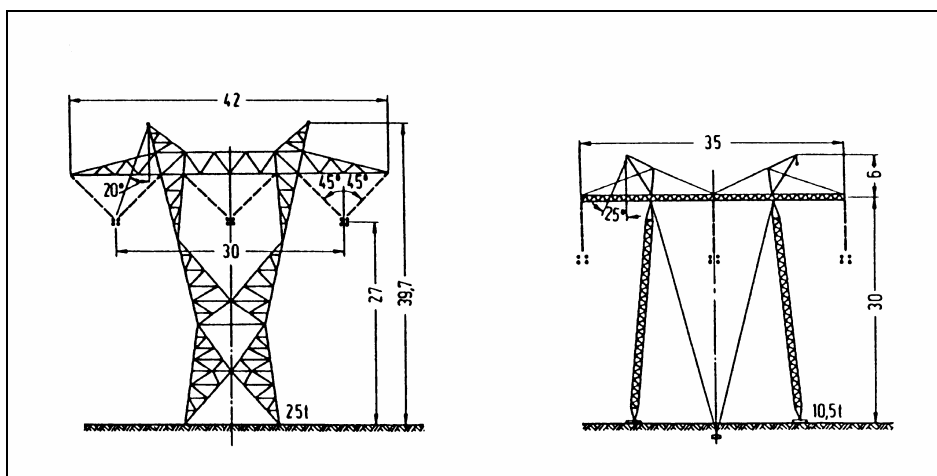


Bild 1.6: Mastformen von 735- bzw. 750-kV-Leitungen in Kanada (links) und Rußland (rechts)

In den Spannungsebenen oberhalb 380 kV geht man aus Platzgründen wieder zu Einfachleitungen über (Bild 1.6). Eine Ausnahme macht hier Japan, wo man grundsätzlich auch in den höheren Spannungsebenen Doppelleitungen baut.

Bei den Masten unterscheidet man zwischen reinen *Tragmasten*, *Abspannmasten*, *Winkelabspannmasten*, an denen die Freileitung ihre Richtung ändert, *Verdrillungsmasten*, an denen die Leiterseile zur Symmetrisierung der Parameter ihre Plätze tauschen, und *Endmasten*, an denen die Freileitung in ein Umspannwerk geführt wird oder in ein Kabel übergeht (Bild 1.7).

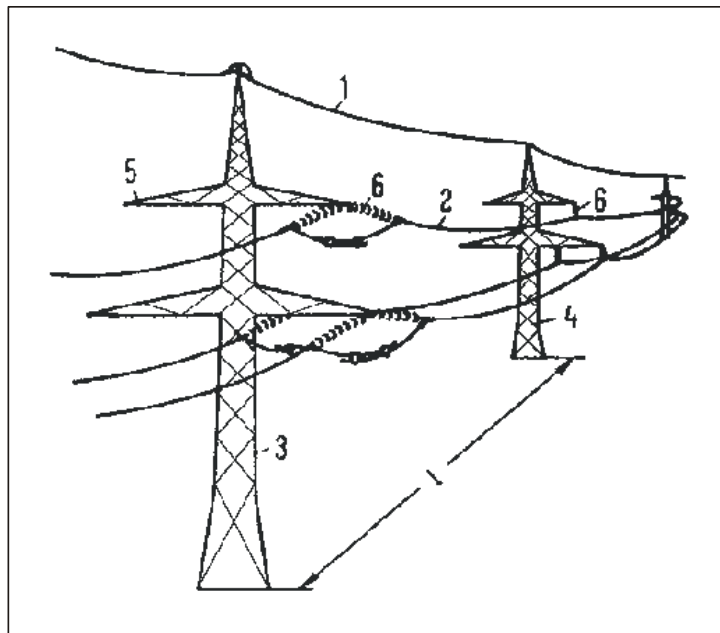


Bild 1.7: Mastformen der Hochspannungsfreileitung

- 1 Erd- oder Blitzschutzseil
- 2 Leiterseil
- 3 Abspannmast
- 4 Tragmast
- 5 Traverse
- 6 Isolator
- 7 Spannfeldlänge

Die Abspannmasten nehmen die Zugkräfte der Leiterseile auf. Je nach Leitungsführung und Geländebeschaffenheit ist jeder 5. bis 15. Mast ein Abspannmast.

Die Bereiche der wirtschaftlichen *Spannweiten* (Mastabstände) bei normalen Geländebeziehungen und Stahlmasten sowie die minimale *Leiterseilhöhe* vom Erdboden enthält Tabelle 1.2

Tabelle 1.2: Spannweiten und Leiterseilhöhen von Freileitungen

Nennspannung	Spannweite	minimale Höhe
110 kV	220...350 m	6 m
220 kV	300...400 m	6,73 m
380 kV	350...450 m	7,8 m

Als *Isolatoren* werden bis 20 kV (selten bis 30 kV) gewöhnlich *Stützisolatoren* eingesetzt. Von 110 kV aufwärts kommen *Langstabisolatoren* aus Porzellan oder *Ketten* aus Glas- oder Porzellankappen zur Anwendung. 110-kV-Freileitungen erkennt man daran, daß sie mit einem Langstabilisolator isoliert sind, während eine 220-kV-Leitung durch zwei und eine 380-kV-Leitung durch drei Langstäbe auffällt. Die Isolatoren müssen neben der Span-

nungsbeanspruchung auch den mechanischen Beanspruchungen insbesondere unter zusätzlicher Wind- und Eislast standhalten. Sogenannte V-Isolatorenketten, Isoliertraversen und Leiterabstandshalter werden zur Verringerung der Trassenbreite eingesetzt.

Als *Leiterseile* werden heute anstelle von Vollseilen aus Kupfer (früher) oder Aluminium ab 110 kV aufwärts Aluminium-Stahl-(Al/St-) *Verbundseile* verwendet (Bild 1.8).

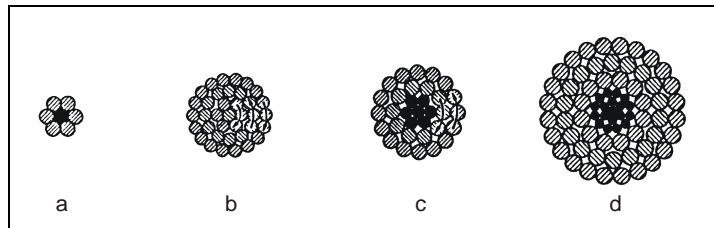


Bild 1.8: Aufbau von Freileitungsseilen

a) Al/St-Seil (eine Lage Al); b) Al- oder Cu-Seil (3Lagen, 37 Drähte);

c) Al/St-Seil (2 Lagen Al); d) Al/St-Seil (3 Lagen Al)

Das Stahlseil im Innern der Verbundseile erhöht die mechanische Festigkeit und den äußeren Radius des Leiterseils, was sich günstig auf die Parameter der Freileitung auswirkt und den Koronaansatz verzögert. Die Stromführung übernimmt der besser leitfähige Aluminiummantel. Die Querschnitte von Stahl und Aluminium werden in der Reihenfolge Aluminium, Stahl angegeben. So bedeutet Al/St 240/40 einen Aluminiumquerschnitt von 240 mm<sup>2</sup> und einen Stahlquerschnitt von 40 mm<sup>2</sup>. Das Verhältnis der Querschnitte Aluminium zu Stahl liegt bei den Leitungen in Deutschland zwischen 6 und 7,7. Die Stahlseele besteht gewöhnlich aus 7 oder bei Seilen größeren Querschnitts aus 19 Drähten um die 2 oder 3 Lagen aus Aluminiumdrähten unterschiedlicher Schlagrichtung angeordnet sind. Zur Überwindung großer Spannweiten werden Seile mit größerem Stahlquerschnitt verwendet.

Ab 220 kV werden sogenannte *Bündelleiter* eingesetzt. Ein Bündelleiter besteht aus 2 bis 4 (bei der Höchstspannungsleitung in Rußland aus 8) Leiterseilen, den sogenannten *Teilleitern*, die durch Abstandshalter parallel geführt werden. Der Strom und die Ladung verteilen sich gleichmäßig auf die Teilleiter. Neben der Querschnittserhöhung haben die Bündelleiter den Vorteil, daß sie sich elektrisch wie ein runder Einzelleiter mit einem relativ großen Radius  $r_B$  verhalten und als schwingungssicher gelten. Dieser sogenannte *Bündelleiter-Ersatzradius* liegt zwischen 6,2 und 22 cm je nach Bündelzahl und Teilleiterabstand  $a$  (Bild 1.9).

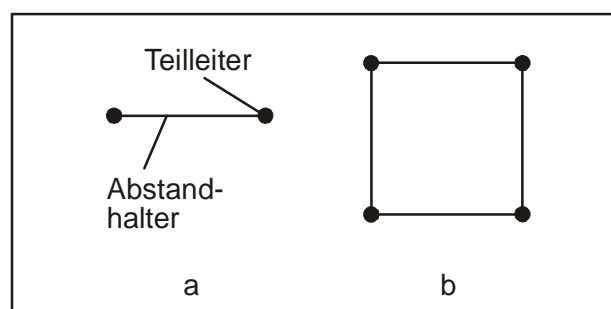


Bild 1.9: Bündelleiteranordnungen

a) 2-er Bündel b) 4-er Bündel

Durch den größeren Ersatzradius wird zum einen die Oberflächenrandfeldstärke mit Rücksicht auf die durch die Koronaentladungen verursachten HF-Störungen auf 17,5 kV/cm begrenzt und zum anderen werden die Induktivitäten der Freileitung kleiner und die Kapazitäten größer und damit der Wellenwiderstand kleiner. Kleinerer Wellenwiderstand erhöht bei gleicher Spannung die natürliche Leistung, und kleinere Induktivität verringert bei glei-



chem Strom den Spannungsabfall. Diese Zusammenhänge werden in Kapitel 6 erläutert. Bild 1.10 zeigt die Feldbilder von Bündelleitern.

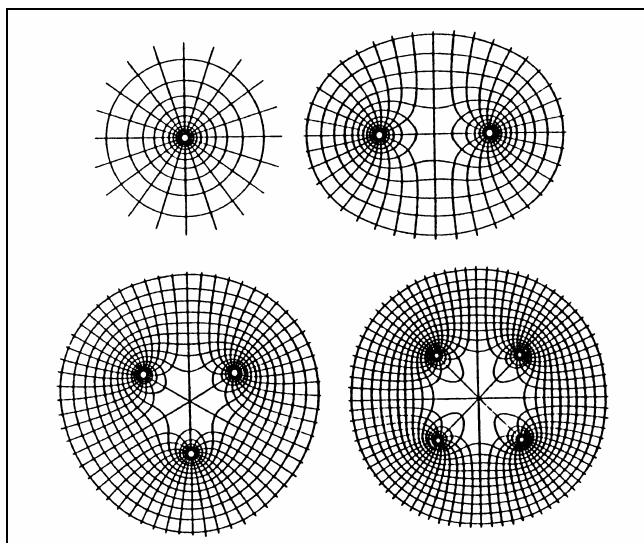


Bild 1.10: Feldbilder von Bündelleitern im Vergleich zum Einzelleiter

Tabelle 1.3: Daten von Freileitungsseilen

Land	Nennspannung	Leiterseil und Querschnitt	$r/cm$	$a/cm$	$r_B/cm$
Ostdeutschland <sup>2)</sup>	10 kV	50 Al	0,45	-	-
Ostdeutschland	20 kV	70 Al	0,575	-	-
		95 Al	0,625	-	-
Ostdeutschland	30 kV	120 Al	0,7	-	-
		95/15 Al/St	0,68	-	-
Ostdeutschland	110 kV	150/25 Al/St	0,855	-	-
		210/36 Al/St	1,015	-	-
Ostdeutschland	220 kV	2×185/32 Al/St	0,96	40	6,2
West- und Ost-deutschland	380 kV	4×240/40 Al/St	1,085	40	17,7
Ostdeutschland	380 kV	3×380/50 Al/St	1,35	50	15
Schweden	380 kV	2×525/68 Al/St	1,585	45	8,45
Rußland	500 kV	3×480/60 Al/St	1,51	40	13,4
Kanada	735 kV	4×655/34 Al/St	1,75	45,7	22

Die Tabelle 1.3 enthält für häufig eingesetzte Leiterseile den (Teil-)Leiterradius  $r$ , den Teil-leiterabstand  $a$  und den Bündelleitersersatzradius  $r_B$ . Beim weiteren Ausbau des 380-kV-Netzes in der Bundesrepublik Deutschland Ende der 50er Jahre hat sich die Deutsche Verbundgesellschaft (DVG) für einen einheitlichen Mast (Donaumast) mit einheitlicher Be-seilung mit einem Stahlaluminiumseil 240/40 mm<sup>2</sup> als 2-er Bündel bei 220 kV und 4-er Bündel bei 380 kV entschieden, so daß dieses Mastbild heute in Westdeutschland vor-herrscht. In der ehemaligen DDR waren die Seilbelegungen ebenfalls genormt. Die Lei-tungen in Ostdeutschland weisen deshalb einheitlich die Werte in Tabelle 1.3 auf. Die ma-ximale *Leitungsseil-Temperatur* darf nach DIN 48204 im Dauerbetrieb 80°C nicht über-

<sup>2)</sup> Gebiet der ehemaligen DDR

schreiten. Im Kurzschluß sind kurzfristig Leitertemperaturen bis 200°C zulässig (DIN VDE 0103).

Während früher die Freileitungen durch Aufmodulation von hochfrequenten Trägersignalen (TFH) auch zur Signalübertragung genutzt wurden, werden heute zunehmend Lichtwellenleiter im Erdseil und bei 110-kV-Leitungen auch schon im Leiterseil (ein Stahldraht wird durch ein Röhrchen, in dem der Lichtwellenleiter untergebracht wird, ersetzt) verlegt. Mit dem Lichtwellenleiter können außerdem die Temperaturen gemessen und Fehlerstellen geortet werden. Die auf den Mastspitzen oder auf den Masttraversen angebrachten *Erdseile* (Bild 1.7) haben die Aufgabe, die Leiterseile vor Blitzeinschlägen, die zu sogenannten Erdfehlern führen würden, zu schützen und im Fall unsymmetrischer Kurzschlüsse, bei denen Teilkurzschlußströme über die Erde fließen, einen Teil des Erdstromes aufzunehmen. Die Erdseile müssen dazu ausreichend bemessen sein und dürfen in Netzen mit niederohmiger Sternpunktterdung keine zu große Selbstinduktivität haben. Stahlseile sind deshalb nur für Netze mit freiem Sternpunkt oder Resonanzsternpunktterdung geeignet. Man geht heute dazu über, für die Erdseile ebenfalls Al/St-Seile zu verwenden. Erdseile, die auf Stützisolatoren geführt sind, dienen ebenfalls der TFH-Signalübertragung. Bei Blitzeinschlägen und Erdkurzschlüssen schlägt die relativ kleine Isolationstrecke zum geerdeten Mast über.

Um bei größeren Leitungslängen größere Unsymmetrien der Leitungsparameter bezüglich der einzelnen Leiter der Leitungen und die Beeinflussung untereinander und von benachbarten Leitungen zu vermeiden bzw. zu verringern, werden die Leitungen ab 110 kV bei Längen über 20 km *verdrillt*.

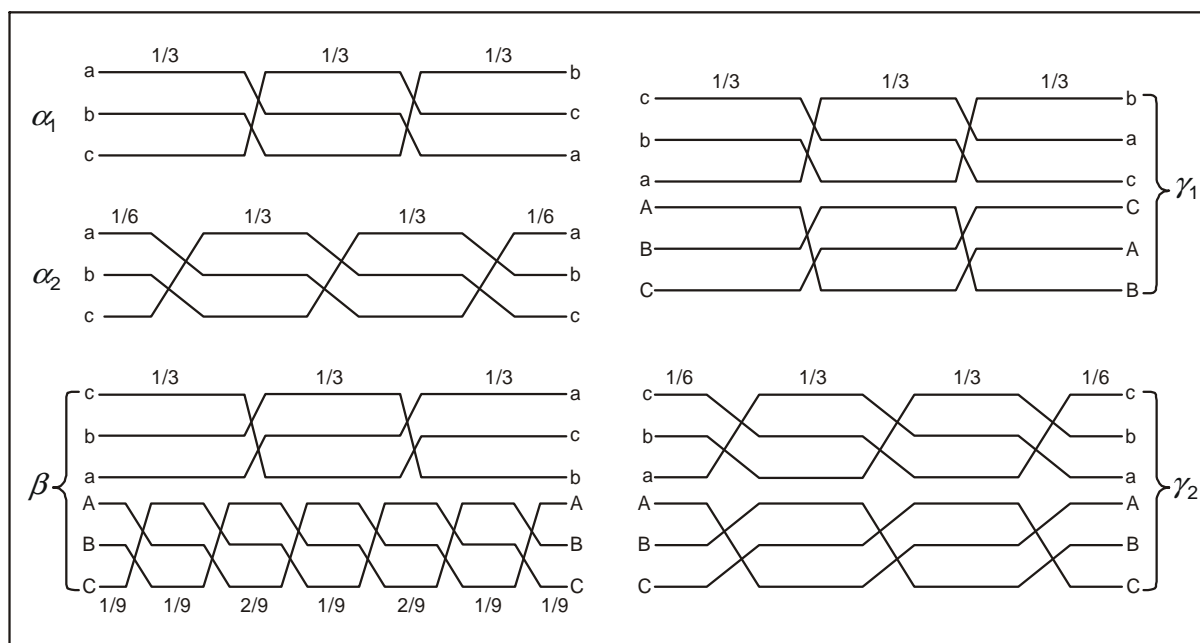


Bild 1.11: Verdrillungsarten von Freileitungen

Die Leiterseile werden dann an Abspannmasten (die dann Verdrillungsmast heißen) in ihren Plätzen getauscht. Damit jeder Leiter über die gesamte Leitungslänge gesehen einmal jeden möglichen Platz am Mast eingenommen hat, sind mindestens 2 Verdrillungsstellen (Maste) notwendig. In der Regel genügt für Leitungslängen bis 200 km ein solcher Umlauf. In Bild 1.11 sind die üblichen Verdrillungsarten für Einfach- und Doppelleitungen dargestellt. Die Verdrillungsarten  $\alpha$  für Einfachleitungen unterscheiden sich dadurch, daß bei  $\alpha_2$  nach einem Umlauf wieder die gleiche Phasenfolge am Mast vorliegt. Dazu ist allerdings ein weiterer Verdrillungsmast erforderlich. Derselbe Unterschied besteht zwischen den Verdrillungsarten  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  für Doppelleitungen. Die aufwendige Verdrillungsart  $\beta$  für

---

Doppelleitungen hat eine vollständige Entkopplung der beiden Stromkreise im stationären Betrieb zur Folge. Sie wird heute nicht mehr angewendet.

## 2 Einphasenleitung

### 2.1 Ersatzschaltung mit verteilten Parametern\*

Die Strom-Spannungsbeziehungen für eine Einphasenfreileitung stellen ein partielles Differentialgleichungssystem für die Variablen Zeit ( $t$ ) und Ort ( $x$ ) dar. Für die positiven Zählrichtungen in Bild 2.1 lauten die auch *Telegraphengleichungen* genannten *Leitungsgleichungen* bekanntlich:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -R' i_x - L' \frac{\partial i_x}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial i_x}{\partial x} = -G' u_x - C' \frac{\partial u_x}{\partial t} \quad (2.2)$$

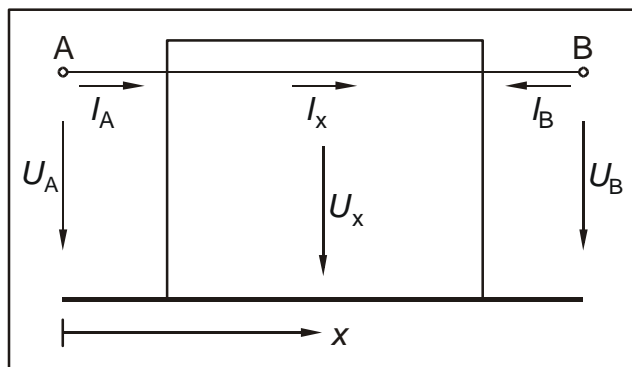


Bild 2.1: Einphasenleitung mit Erdrückleitung

Die Parameter  $R'$ ,  $L'$ ,  $G'$  und  $C'$  in den Gln. (2.1) und (2.2) sind der Widerstandsbelag, Induktivitätsbelag, Ableitungsbelag und Kapazitätsbelag. Diese *Leitungsbeläge* sind auf die Längeneinheit 1 km bezogen.

Zur Lösung der Leitungsgleichungen werden diese zunächst in den Frequenzbereich transformiert. Im Frequenzbereich läßt sich die *Frequenzabhängigkeit* der Leitungsparameter, die von der endlichen Leitfähigkeit der Erde herrührt, einfacher berücksichtigen. Die Gln. (2.1) und (2.2) gehen über in ein Zustandsdifferentialgleichungssystem für die ortsabhängigen *Bildgrößen*, die durch Großbuchstaben gekennzeichnet sind:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} U_x \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -Z' \\ -Y' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ I_x \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

wobei

$$Z' = R' + j\omega L' \quad (2.4)$$

und

$$Y' = G' + j\omega C' \quad (2.5)$$

der *Impedanz* - und *Admittanzbelag* sind.  
Mit dem Lösungsansatz:

$$\begin{bmatrix} U_x \\ I_x \end{bmatrix} = \mathbf{c} e^{\lambda x} \quad (2.6)$$

folgt aus Gl. (2.3)

$$\begin{bmatrix} \lambda & Z' \\ Y' & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (2.7)$$

Gl. (2.7) hat nichttriviale Lösungen ( $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ ) nur für

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & Z' \\ Y' & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - Z'Y' = 0 \quad (2.8)$$

d.h.

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{Z'Y'} = \pm \gamma \quad (2.9)$$

Durch Einsetzen der *Eigenwerte*  $\lambda_1 = \gamma$  und  $\lambda_2 = -\gamma$  in die Gl. (2.7) erhält man die beiden Vektoren  $\mathbf{c}_1 = k_1 \mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{c}_2 = k_2 \mathbf{v}_2$ , die bis auf die beliebigen Faktoren  $k_1$  und  $k_2$  mit den *Eigenvektoren*  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  identisch sind.

$$\begin{bmatrix} U_x \\ I_x \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -Y_w \end{bmatrix} e^{\gamma x} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ Y_w \end{bmatrix} e^{-\gamma x} \quad (2.10)$$

Mit  $Y_w$  wurde in Gl. (2.10) der Kehrwert des *Wellenwiderstandes*

$$Z_w = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \frac{1}{Y_w} \quad (2.11)$$

eingeführt. Der Betrag der Eigenwerte

$$\gamma = \sqrt{Z'Y'} = \alpha + j\beta \quad (2.12)$$

heißt *Fortpflanzungsmaß*, dessen Realteil  $\alpha$  das *Dämpfungsmaß* und dessen Imaginärteil  $\beta$  das *Phasenmaß* ist.

Die beiden Konstanten  $k_1$  und  $k_2$  können aus den Strom- und Spannungsbedingungen an den Leitungsenden bestimmt werden.

Am *Leitungsanfang* gilt  $x = 0$  und damit

$$\begin{bmatrix} U_A \\ I_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -Y_w & Y_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -Z_w \\ 1 & Z_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ I_A \end{bmatrix}$$

Eingesetzt in die wie folgt umgeordnete Gl. (2.10) ergibt sich

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_x \\ I_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -Y_w & Y_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\gamma x} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{\gamma x} + e^{-\gamma x} & -Z_w(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) \\ -Y_w(e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}) & e^{\gamma x} + e^{-\gamma x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ I_A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \gamma x & -Z_w \sinh \gamma x \\ -Y_w \sinh \gamma x & \cosh \gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ I_A \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Analog erhält man aus den Bedingungen am Leitungsende bei  $x = l$  unter Beachtung von  $I(l) = -I_B$

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-\gamma l} & Z_w e^{-\gamma l} \\ e^{\gamma l} & -Z_w e^{\gamma l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_B \\ I_B \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} U_x \\ I_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma(l-x) & -Z_w \sinh \gamma(l-x) \\ Y_w \sinh \gamma(l-x) & -\cosh \gamma(l-x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_B \\ I_B \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Für  $x = l$  in Gl. (2.13) und  $x = 0$  in Gl. (2.14) folgen die beiden ineinander überführbaren Gleichungssysteme für den Zusammenhang der Ströme und Spannungen an den Leitungsenden<sup>3)</sup>:

$$\begin{bmatrix} U_A \\ I_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & -Z_w \sinh \gamma l \\ Y_w \sinh \gamma l & -\cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_B \\ I_B \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\begin{bmatrix} U_B \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & -Z_w \sinh \gamma l \\ Y_w \sinh \gamma l & -\cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ I_A \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Führt man in den Gln. (2.15) und (2.16) noch einen Variablentausch, der die Spannungen und Ströme in je einem Vektor anordnet aus, so erhält man schließlich

$$\begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_w \coth \gamma l & Z_w (\sinh \gamma l)^{-1} \\ Z_w (\sinh \gamma l)^{-1} & Z_w \coth \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_w \coth \gamma l & -Y_w (\sinh \gamma l)^{-1} \\ -Y_w (\sinh \gamma l)^{-1} & Y_w \coth \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_A \\ U_B \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Für den hier ausschließlich interessierenden *eingeschwungenen* Zustand mit Betriebsfrequenz gelten die vorstehenden Gleichungen im Frequenzbereich für die Zeigergrößen  $\underline{U}_A$ ,  $\underline{U}_B$ ,  $\underline{I}_A$ ,  $\underline{I}_B$ ,  $\underline{U}_x$  und  $\underline{I}_x$ . Die sonst aufwendige Rücktransformation (z.B. bei der Berechnung von Ausgleichsvorgängen auf Leitungen) vereinfacht sich zur gewohnten Realteilbildung. Wir wollen mit Hinweis auf die Beschränkung auf den eingeschwungenen Zustand i. f. auch die Zeigerschreibweise benutzen (unterstrichene Größen).

<sup>3)</sup> Beachte: Die Inversen der Matrizen in Gl.(2.15) bzw. (2.16) sind gleich den Matrizen selbst.

Zu der Spannungsgleichung Gl. (2.17) lässt sich die *T-Ersatzschaltung* in Bild 2.2 angeben. Die Impedanzen der Ersatzschaltung ergeben sich aus dem bekannten Bildungsgesetz der Maschenimpedanzmatrix mit  $\underline{I}_A$  und  $\underline{I}_B$  als Maschenströme.

Zu der Stromgleichung Gl. (2.18) lässt sich sofort die *II-Ersatzschaltung* in Bild 2.3 angeben. Die Admittanzen ergeben sich aus dem bekannten Bildungsgesetz der Knotenadmittanzmatrix mit  $\underline{U}_A$  und  $\underline{U}_B$  als Knotenspannungen.

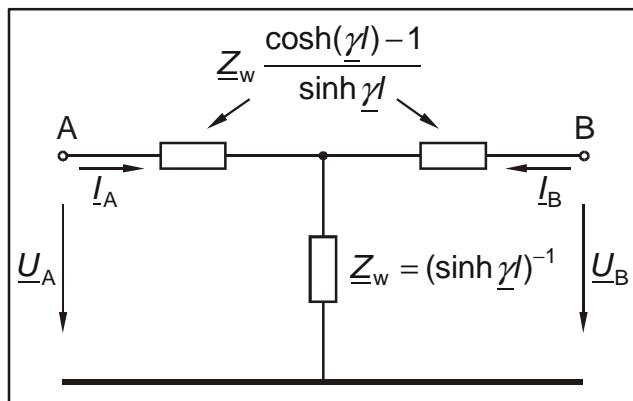


Bild 2.2: T-Ersatzschaltung (Impedanzersatzschaltung) der Einphasenleitung

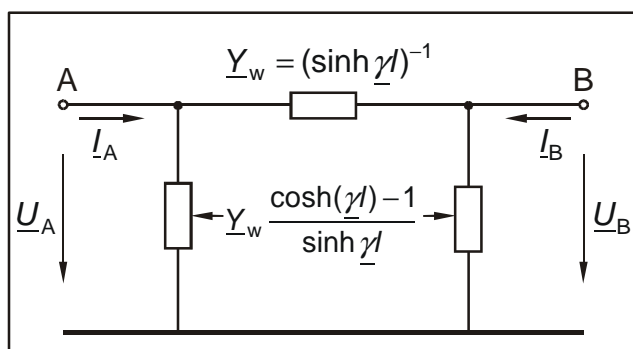


Bild 2.3: II-Ersatzschaltung (Admittanzersatzschaltung) der Einphasenleitung

Der Wellenwiderstand  $\underline{Z}_w$ , der Wellenleitwert  $\underline{Y}_w$  und das Ausbreitungsmaß  $\underline{\gamma}$  in den Ersatzschaltungen gelten ebenfalls für Betriebsfrequenz.

## 2.2 Ersatzschaltung mit konzentrierten Parametern

Für elektrisch kurze Leitungen, d.h.  $\underline{\gamma}l \ll 1$ , lassen sich die hyperbolischen Funktionen wie folgt annähern

$$\sinh \underline{\gamma}l \approx \underline{\gamma}l$$

$$\cosh \underline{\gamma}l \approx 1 + \frac{1}{2}(\underline{\gamma}l)^2$$

Damit wird

$$\underline{Y}_w = (\sinh \underline{\gamma} l)^{-1} = \frac{\underline{Y}_w}{\underline{\gamma} l} = \frac{\underline{Y}_w}{\sqrt{\underline{Z}' \underline{Y}' l}} = \frac{1}{\underline{Z}' l} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX}$$

$$\underline{Y}_w \frac{\cosh \underline{\gamma} l - 1}{\sinh \underline{\gamma} l} = \underline{Y}_w \frac{1}{2} \frac{(\underline{\gamma} l)^2}{\underline{\gamma} l} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\underline{Y}'}{\underline{Z}'}} \sqrt{\underline{Z}' \underline{Y}' l} = \frac{1}{2} \underline{Y}' l = \frac{1}{2} \underline{Y} = \frac{1}{2} (G + jB)$$

und analog

$$\underline{Z}_w = (\sinh \underline{\gamma} l)^{-1} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + jB}$$

$$\underline{Z}_w \frac{\cosh \underline{\gamma} l - 1}{\sinh \underline{\gamma} l} = \frac{1}{2} \underline{Z} = \frac{1}{2} (R + jX)$$

Die Ersatzschaltungen mit den so vereinfachten Impedanz- und Admittanzausdrücken sind in den Bildern 2.4 und 2.5 dargestellt, wobei jetzt den üblichen Gepflogenheiten folgend, an die Längsglieder Impedanzen und an die Querglieder Admittanzen geschrieben sind.

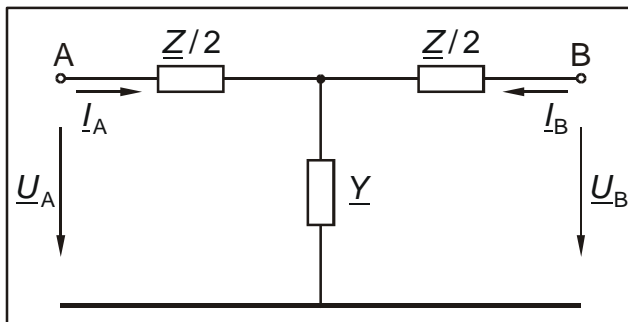


Bild 2.4: T-Ersatzschaltung der kurzen Leitung

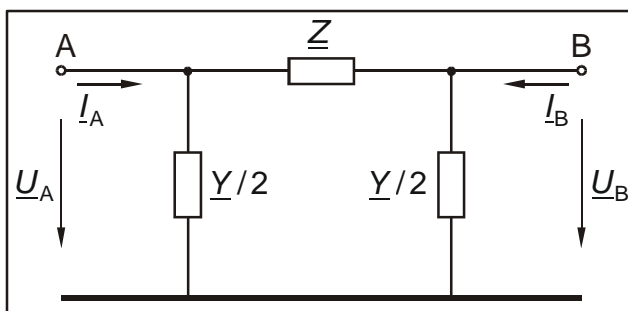


Bild 2.5: II-Ersatzschaltung der kurzen Leitung

Die Ersatzschaltungen in den Bildern 2.4 und 2.5 heißen auch Ersatzschaltungen mit *konzentrierten* Parametern. Anstelle der beiden Parameter  $\underline{Z}_w$  bzw.  $\underline{Y}_w$  und  $\underline{\gamma}$  sind die Impedanzen  $\underline{Z}$  und  $\underline{Y}$  bzw. deren halber Wert getreten. Abschließend sei bemerkt, daß man den Gültigkeitsbereich der Ersatzschaltungen der kurzen Leitungen durch sogenannte *Vierpolkettenschaltungen*, d.h. eine Hintereinanderschaltung von T- oder II-Vierpolen mit entsprechend unterteilten Impedanzen  $\Delta \underline{Z}$  und  $\Delta \underline{Y}$  wieder ausdehnen kann (Bild 2.6).



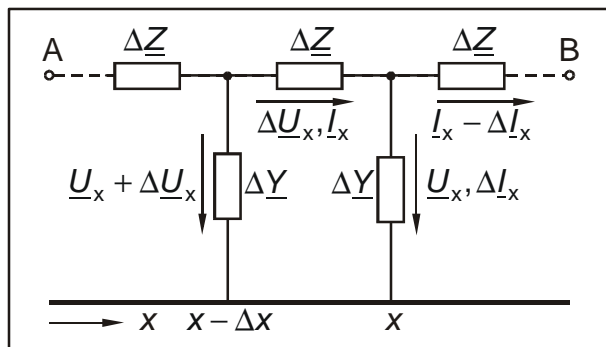


Bild 2.6: Vierpolkettenschaltung der Einphasenleitung

Bei infinitesimal feiner Unterteilung gehen die  $\Delta Z$  und  $\Delta Y$  in die Leitungsbeläge  $Z'$  und  $Y'$  über und man gelangt - wie die folgende Rechnung zeigt - durch die Grenzübergänge für die Längsspannungen und die Querströme wieder zu dem ursprünglichen Gleichungssystem (2.3).

Aus

$$\Delta U_x = \Delta Z I_x = Z' \Delta x I_x \tag{2.19}$$

und

$$\Delta I_x = \Delta Y U_x = Y' \Delta x U_x \tag{2.20}$$

wird mit

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(U_x + \Delta U_x) - U_x}{x - (x - \Delta x)} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x) - U(x - \Delta x)}{x - (x - \Delta x)} = - \frac{\partial U_x}{\partial x}$$

und dem analogen Ergebnis für die Stromänderung

$$- \frac{\partial U_x}{\partial x} = Z' I_x \text{ und } - \frac{\partial I_x}{\partial x} = Y' U_x \quad (\text{q.e.d.})$$

### 3 Drehstrom-Einfachleitung

Die Leiter und die Erde der Mehrphasen- oder Mehrleiteranordnungen sind vollständig induktiv und kapazitiv gekoppelt. Das  $\Pi$ -Ersatzschaltbild für die elektrisch kurze Leitung bei Betriebsfrequenz zeigt Bild 3.1.

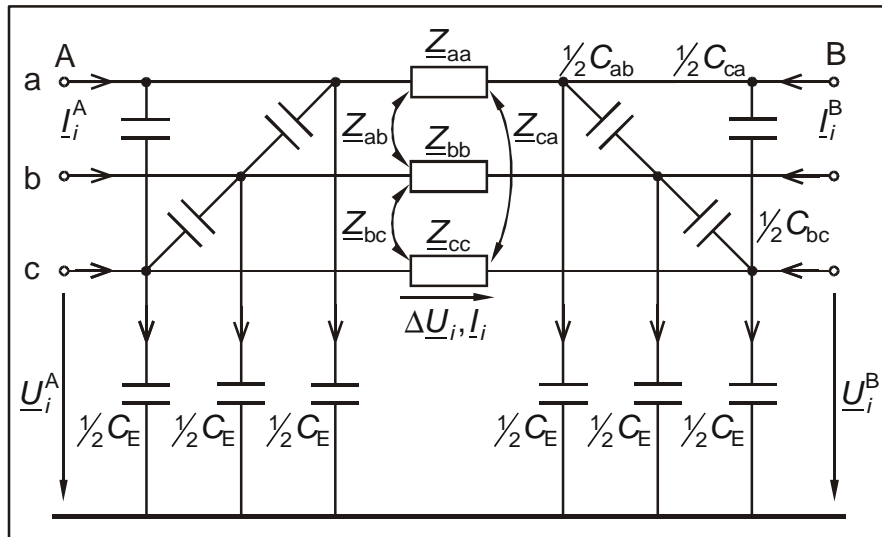


Bild 3.1:  $\Pi$ -Ersatzschaltung mit Zählpfeilen für die Drehstrom-Einfachleitung ( $i = a, b, c$ )

Die Erde ist in dieser Ersatzschaltung ein widerstands- und induktivitätsloser idealer Leiter. Der Erdbodenwiderstand und die zwischen den Leitern und der Erde gebildeten Induktivitäten sind in den Impedanzen  $\underline{Z}_{ik}$ , die deshalb auch *Schleifenimpedanzen* heißen, enthalten.

Man kann die Impedanzen meßtechnisch bestimmen, indem man ein Leitungsende kurzschließt und am anderen Ende einspeist und eine Strom- und Spannungsmessung nach Betrag und Phase vornimmt. Bei Messung der Größen ein- und desselben Leiters erhält man dessen *Leiter-Erde-Selbstimpedanz*  $\underline{Z}_{ii}$  und bei Messung zwischen zwei Leitern die entsprechende *Leiter-Erde-Gegenimpedanz*  $\underline{Z}_{ki} = \underline{Z}_{ik}$ . Auf die Berechnung der Schleifenimpedanzen wird in Abschnitt 5.1 eingegangen.

#### 3.1 Induktive Verkettung

Für die *Spannungsabfälle* über den Längsgliedern liest man in Bild 3.1 ab

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_a^A \\ \underline{U}_b^A \\ \underline{U}_c^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{U}_a^B \\ \underline{U}_b^B \\ \underline{U}_c^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{aa} & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ac} \\ \underline{Z}_{ba} & \underline{Z}_{bb} & \underline{Z}_{bc} \\ \underline{Z}_{ca} & \underline{Z}_{cb} & \underline{Z}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

oder kürzer

$$\underline{u}_A - \underline{u}_B = \Delta \underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$$

Aufgrund der i. a. unterschiedlichen Leiterhöhen über dem Erdboden und der ungleichen Leiterabstände untereinander sind die Selbst-(Diagonalelemente) und Gegenimpedanzen (Nichtdiagonalelemente) in der *Impedanzmatrix*  $\underline{Z}$  untereinander nicht gleich.  $\underline{Z}$  ist somit

lediglich diagonal symmetrisch ( $Z_{ki} = Z_{ik}$  für  $k \neq i$ ).

Hat die Leitung Erdseile, so erweitert sich die Gl. (3.1) entsprechend. Bei 2 Erdseilen p und q erhält man dann beispielsweise:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \\ \Delta \underline{U}_p \\ \Delta \underline{U}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & Z_{ap} & Z_{aq} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} & Z_{bp} & Z_{bq} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} & Z_{cp} & Z_{cq} \\ Z_{pa} & Z_{pb} & Z_{pc} & Z_{pp} & Z_{pq} \\ Z_{qa} & Z_{qb} & Z_{qc} & Z_{qp} & Z_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_p \\ I_q \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

oder in Kurzschreibweise

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_L \\ \Delta \underline{u}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{LL} & Z_{LE} \\ Z_{EL} & Z_{EE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_L \\ \underline{i}_E \end{bmatrix} \quad (3.2a)$$

Bei Erdung der Erdseile an jedem Mast ist  $\Delta \underline{U}_p = \Delta \underline{U}_q$  und somit  $\Delta \underline{u}_E = \mathbf{0}$ , und man kann die Erdseilströme  $\underline{i}_E$  eliminieren. Aus der 2. Zeile von Gl. (3.2a) folgt

$$\underline{i}_E = -Z_{EE}^{-1} Z_{EL} \underline{i}_L$$

und nach Einsetzen dieses Ausdruckes in die 1. Zeile von Gl. (3.2a)

$$\Delta \underline{u}_L = (Z_{LL} - Z_{LE} Z_{EE}^{-1} Z_{EL}) \underline{i}_L = Z_{LL}^E \underline{i}_L$$

und ausführlich

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa}^{pq} & Z_{ab}^{pq} & Z_{ac}^{pq} \\ Z_{ba}^{pq} & Z_{bb}^{pq} & Z_{bc}^{pq} \\ Z_{ca}^{pq} & Z_{cb}^{pq} & Z_{cc}^{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Man nennt die Elimination der Erdseilströme auch die *Modifikation* der Leitungsparameter. Die Gl. (3.3) hat die gleiche Form wie die Gl. (3.1) für die Leitung ohne Erdseile, enthält aber im Gegensatz zu Gl. (3.1) die sogenannten *modifizierten* Leitungsimpedanzen. Diese sind durch die oberen Indizes p und q bzw. E gekennzeichnet.

Sind die Leiterseile vollständig verdrillt (s. Anhang 7.1), so nimmt Gl. (3.2) folgende Form an

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \\ \Delta \underline{U}_p \\ \Delta \underline{U}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{nn} & Z_{nm} & Z_{nm} & Z_{np} & Z_{nq} \\ Z_{nm} & Z_{nn} & Z_{nm} & Z_{np} & Z_{nq} \\ Z_{nm} & Z_{nm} & Z_{nn} & Z_{np} & Z_{nq} \\ Z_{pn} & Z_{pn} & Z_{pn} & Z_{pp} & Z_{pq} \\ Z_{qn} & Z_{qn} & Z_{qn} & Z_{qp} & Z_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_p \\ I_q \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

und nach der Modifizierung

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{nn}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} \\ \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nn}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} \\ \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nn}^{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Die Impedanzmatrix in Gl. (3.5) ist diagonal-zyklisch symmetrisch, und die modifizierten Impedanzen der verdrehten Einfachleitung berechnet man aus

$$\underline{Z}_{nn}^{pq} = \underline{Z}_{nn} - \frac{\underline{Z}_{np}^2 \underline{Z}_{qq} + \underline{Z}_{nq}^2 \underline{Z}_{pp} - 2 \underline{Z}_{pq} \underline{Z}_{np} \underline{Z}_{nq}}{\underline{Z}_{pp} \underline{Z}_{qq} - 2 \underline{Z}_{pq}^2} \quad (3.6)$$

$$\underline{Z}_{nm}^{pq} = \underline{Z}_{nm} - \frac{\underline{Z}_{np} \underline{Z}_{qq} + \underline{Z}_{nq} \underline{Z}_{pp} - 2 \underline{Z}_{pq} \underline{Z}_{np} \underline{Z}_{nq}}{\underline{Z}_{pp} \underline{Z}_{qq} - 2 \underline{Z}_{pq}^2} \quad (3.7)$$

Der Einfluß der Erdseile ist somit auf alle Impedanzen der verdrehten Leitung gleich, worauf wir bei der Bildung der Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten zurückkommen werden. Sind die Erdseile noch gleich und symmetrisch zu den Leiterseilen angeordnet, so vereinfachen sich wegen  $\underline{Z}_{np} = \underline{Z}_{nq}$  und  $\underline{Z}_{qq} = \underline{Z}_{pp}$  die Ausdrücke für die modifizierten Impedanzen weiter zu

$$\underline{Z}_{nn}^{pq} = \underline{Z}_{nn} - \frac{2 \underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq}} \quad (3.8)$$

$$\underline{Z}_{nm}^{pq} = \underline{Z}_{nm} - \frac{2 \underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq}} \quad (3.9)$$

Wir fassen zusammen: Die Impedanzmatrix der modifizierten Impedanzen der symmetrischen Dreiphasenleitung mit Erdseilen ist diagonal-zyklisch symmetrisch und hat die Form (vereinfachte Schreibweise der Gl. (3.5)) :

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_s & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_s & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (3.5a)$$

### 3.2 Kapazitive Verkettung

Mit Hilfe der MAXWELLSchen *Potentialkoeffizienten* läßt sich der Zusammenhang zwischen den Leiter-Erde-Spannungen und Ladungen der Leiter eines Mehrleitersystems ganz analog zur induktiven Verkettung angeben. Man erhält für eine Drehstrom-Einfachleitung mit 2 Erdseilen für den eingeschwungenen Zustand bei Betriebsfrequenz:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \\ \underline{U}_p \\ \underline{U}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aa} & P_{ab} & P_{ac} & P_{ap} & P_{aq} \\ P_{ba} & P_{bb} & P_{bc} & P_{bp} & P_{bq} \\ P_{ca} & P_{cb} & P_{cc} & P_{cp} & P_{cq} \\ P_{pa} & P_{pb} & P_{pc} & P_{pp} & P_{pq} \\ P_{qa} & P_{qb} & P_{qc} & P_{qp} & P_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Q}_a \\ \underline{Q}_b \\ \underline{Q}_c \\ \underline{Q}_p \\ \underline{Q}_q \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

In Gl. (3.10) sind die  $P_{ii}$  die *Selbst-Potentialkoeffizienten* und die  $P_{ik} (k \neq i)$  die *Gegen-Potentialkoeffizienten*.

Bei geerdeten Erdseilen können wegen  $\underline{U}_p = \underline{U}_q = 0$  deren Ladungen eliminiert werden, wobei die Vorgehensweise völlig analog zur induktiven Verkettung ist. Die modifizierten Potentialkoeffizienten berechnen sich somit ähnlich wie die modifizierten Impedanzen, und das modifizierte Gleichungssystem (3.10) lautet in Analogie zu Gl. (3.3)

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aa}^{ppq} & P_{ab}^{ppq} & P_{ac}^{ppq} \\ P_{ba}^{ppq} & P_{bb}^{ppq} & P_{bc}^{ppq} \\ P_{ca}^{ppq} & P_{cb}^{ppq} & P_{cc}^{ppq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Q}_a \\ \underline{Q}_b \\ \underline{Q}_c \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Die Inversion der diagonal symmetrischen Matrix der Potentialkoeffizienten in Gl. (3.11) ergibt wieder eine diagonal symmetrische Matrix, deren Elemente die *Kapazitätskoeffizienten* sind

$$\begin{bmatrix} \underline{Q}_a \\ \underline{Q}_b \\ \underline{Q}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} & K_{ac} \\ K_{ba} & K_{bb} & K_{bc} \\ K_{ca} & K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Zwischen den Ladungen  $\underline{Q}_i$  und den *Querströmen*  $\Delta I_i$  besteht im eingeschwungenen Zustand der Zusammenhang

$$\Delta I_i = j\omega \underline{Q}_i \quad i = a, b, c \quad (3.13)$$

Folglich wird

$$\begin{bmatrix} \Delta I_a \\ \Delta I_b \\ \Delta I_c \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} & K_{ac} \\ K_{ba} & K_{bb} & K_{bc} \\ K_{ca} & K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

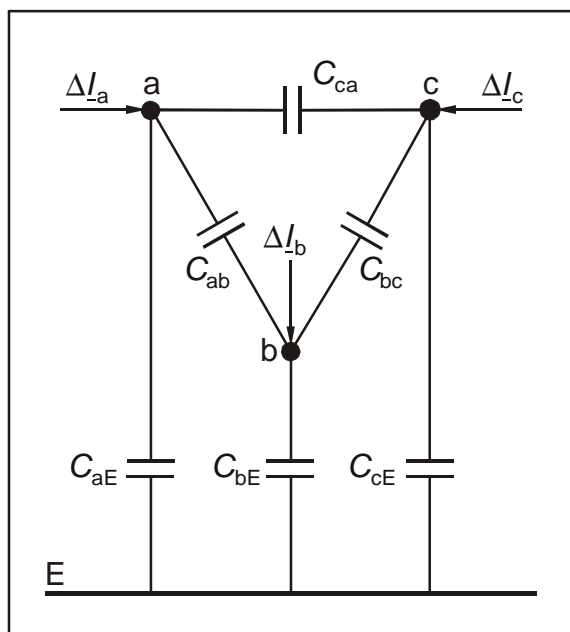


Bild 3.2: Leiter-Erde- und Leiter-Leiter-Kapazitäten der Drehstrom-Einfachleitung

Nach Bild 3.2 lässt sich der Zusammenhang zwischen den Querströmen und den Leiter-Erde-Spannungen auch über eine Kapazitäts-Matrix (Admittanzmatrix) ausdrücken, deren Bildungsgesetz dem der Knotenadmittanzmatrix entspricht.

$$\begin{bmatrix} \Delta I_a \\ \Delta I_b \\ \Delta I_c \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} C_{aa} & -C_{ab} & -C_{ac} \\ -C_{ba} & C_{bb} & -C_{bc} \\ -C_{ca} & -C_{cb} & C_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

mit

$$\begin{aligned} C_{aa} &= C_{aE} + C_{ab} + C_{ac} \\ C_{bb} &= C_{bE} + C_{bc} + C_{ba} \\ C_{cc} &= C_{cE} + C_{ca} + C_{cb} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ein Vergleich der Gln. (3.14) und (3.15) ergibt die später für die Berechnung der Kapazitäten benötigten Zusammenhänge

$$C_{ik} = -K_{ik} \quad k \neq i \tag{3.17}$$

und

$$\begin{aligned} C_{aE} &= K_{aa} + K_{ab} + K_{ac} \\ C_{bE} &= K_{bb} + K_{bc} + K_{ba} \\ C_{cE} &= K_{cc} + K_{ca} + K_{cb} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Insbesondere in Hochspannungsnetzen müssen noch die *Isolations-* und *Koronaverluste* berücksichtigt werden. Dies kann näherungsweise durch Leitwerte parallel zu den Kapazitäten in Bild 3.2 erfolgen. Damit erweitert sich die Gl. (3.15) zu

$$\begin{bmatrix} \Delta I_a \\ \Delta I_b \\ \Delta I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{aa} & -G_{ab} & -G_{ac} \\ -G_{ba} & G_{bb} & -G_{bc} \\ -G_{ca} & -G_{cb} & G_{cc} \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} C_{aa} & -C_{ab} & -C_{ac} \\ -C_{ba} & C_{bb} & -C_{bc} \\ -C_{ca} & -C_{cb} & C_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

oder

$$\Delta \underline{i} = (\underline{G} + j\omega \underline{C}) \underline{u} = \underline{Y} \underline{u}$$

Ist die Leitung vollständig verdrillt, so nehmen die Matrizen der Potentialkoeffizienten in den Gln. (3.10) und (3.11) die gleiche Form wie die Impedanzmatrizen in den Gln. (3.4) und (3.5) an. Die Inverse der in diesem Fall diagonal-zyklisch symmetrischen Matrix der Potentialkoeffizienten der Gl. (3.11) ist ebenfalls diagonal-zyklisch symmetrisch.

$$\begin{bmatrix} P_{nn}^{pq} & P_{nm}^{pq} & P_{nm}^{pq} \\ P_{nm}^{pq} & P_{nn}^{pq} & P_{nm}^{pq} \\ P_{nm}^{pq} & P_{nm}^{pq} & P_{nn}^{pq} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{nm} & K_{nm} \\ K_{nm} & K_{nn} & K_{nm} \\ K_{nm} & K_{nm} & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Ihre Kapazitätskoeffizienten werden

$$K_{nn} = \frac{P_{nn}^{pq} + P_{nm}^{pq}}{(P_{nn}^{pq} - P_{nm}^{pq})(P_{nn}^{pq} + 2P_{nm}^{pq})} \quad (3.21)$$

$$K_{nm} = -\frac{P_{nm}^{pq}}{(P_{nn}^{pq} - P_{nm}^{pq})(P_{nn}^{pq} + 2P_{nm}^{pq})} \quad n \neq m \quad (3.22)$$

Aus den Gln. (3.17) und (3.18) ist ersichtlich, daß jetzt alle Leiter-Erde-Kapazitäten und alle Leiter-Leiter-Kapazitäten untereinander gleich werden

$$C_{ik} = C = -K_{nm} = \frac{P_{nm}^{pq}}{(P_{nn}^{pq} - P_{nm}^{pq})(P_{nn}^{pq} + 2P_{nm}^{pq})} \quad (3.23)$$

$$C_{iE} = C_E = K_{nn} + 2K_{nm} = \frac{1}{P_{nn}^{pq} + 2P_{nm}^{pq}} \quad (3.24)$$

Ebenso werden auch die Diagonalelemente und alle Nichtdiagonalelemente der Leitwertmatrix in Gl. (3.19) untereinander gleich

$$G_{aa} = G_{bb} = G_{cc} = G_E$$

$$G_{ab} = G_{ba} = G_{ca} = G$$

Eine solche symmetrische kapazitive Verkettung hätte auch eine Leitung, deren Leiterseile im gleichseitigen Dreieck so hoch über der Erde angeordnet sind, daß die unterschiedliche Leiterhöhe vernachlässigt werden kann (Bild 3.3).

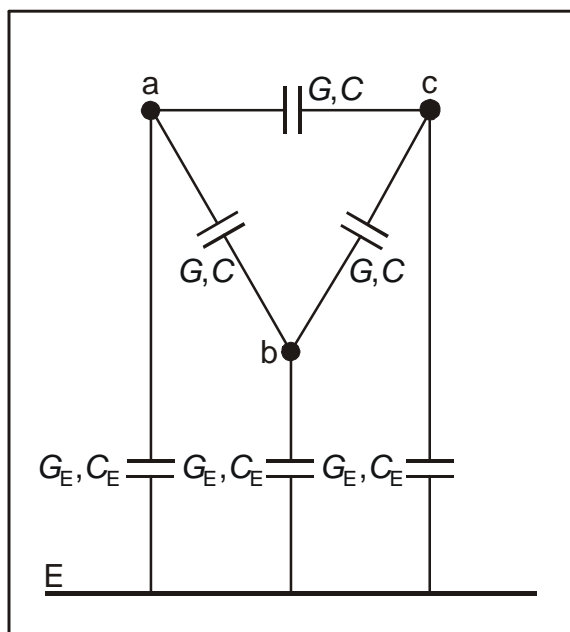


Bild 3.3: Kapazitive Verkettung der symmetrischen Dreiphasen-Einfachleitung

Die Gl. (3.19) nimmt für die symmetrische Dreiphasenleitung folgende Form an:

$$\begin{bmatrix} \Delta I_a \\ \Delta I_b \\ \Delta I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G_E + 2G) + j\omega(C_E + 2C) & -(G + j\omega C) & -(G + j\omega C) \\ -(G + j\omega C) & (G_E + 2G) + j\omega(C_E + 2C) & -(G + j\omega C) \\ -(G + j\omega C) & -(G + j\omega C) & (G_E + 2G) + j\omega(C_E + 2C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

$$= \begin{bmatrix} Y_{nn}^{pq} & Y_{nm}^{pq} & Y_{nm}^{pq} \\ Y_{nm}^{pq} & Y_{nn}^{pq} & Y_{nm}^{pq} \\ Y_{nm}^{pq} & Y_{nm}^{pq} & Y_{nn}^{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_s & Y_g & Y_g \\ Y_g & Y_s & Y_g \\ Y_g & Y_g & Y_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}$$

wobei die Ströme  $\Delta I_i$  die Summe aller von einem Leiter  $i$  abfließenden Querströme sind.

### 3.3 Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten

Unter Annahme einer idealsymmetrischen Leitung (näherungsweise durch Verdrillen erreicht) wurden in den Abschnitten 3.1 und 3.2 folgende Gleichungen<sup>4)</sup> für die Längsspannungsabfälle und Querströme in natürlichen Koordinaten hergeleitet (Gl. (3.5a) und Gl. (3.25)):

$$\begin{bmatrix} \Delta U_a \\ \Delta U_b \\ \Delta U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_s & Z_g & Z_g \\ Z_g & Z_s & Z_g \\ Z_g & Z_g & Z_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad \text{bzw. } \Delta \underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \tag{3.5a}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta I_a \\ \Delta I_b \\ \Delta I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_s & Y_g & Y_g \\ Y_g & Y_s & Y_g \\ Y_g & Y_g & Y_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} \quad \text{bzw. } \Delta \underline{i} = \underline{Y} \underline{u} \tag{3.25}$$

<sup>4)</sup> bei Leitungen mit Erdseilen mit modifizierten Parametern



Die Transformation der Gln. (3.5a) und (3.25) in Symmetrische Koordinaten 1 2 0 mit Hilfe der Transformationsmatrix

$$\underline{T}_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{bmatrix}$$

liefert

$$\Delta \underline{u}_S = \underline{T}_S^{-1} \underline{Z} \underline{T}_S \underline{i}_S = \underline{Z}_S \underline{i}_S \quad (3.26)$$

$$\Delta \underline{i}_S = \underline{T}_S^{-1} \underline{Y} \underline{T}_S \underline{u}_S = \underline{Y}_S \underline{u}_S \quad (3.27)$$

Die Impedanzmatrix  $\underline{Z}_S$  und die Admittanzmatrix  $\underline{Y}_S$  in Symmetrischen Koordinaten sind aufgrund der diagonal-zyklisch symmetrischen Struktur von  $\underline{Z}$  und  $\underline{Y}$  Diagonalmatrizen mit den Elementen

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \underline{Z}_S - \underline{Z}_g = R_1 + jX_1 & \underline{Y}_1 &= \underline{Y}_S - \underline{Y}_g = G_1 + jB_1 \\ \underline{Z}_2 &= \underline{Z}_1 & \underline{Y}_2 &= \underline{Y}_1 \\ \underline{Z}_0 &= \underline{Z}_S + 2\underline{Z}_g = R_0 + jX_0 & \underline{Y}_0 &= \underline{Y}_S + 2\underline{Y}_g = G_0 + jB_0 \end{aligned}$$

so daß die Gln. (3.26) und (3.27) in Symmetrischen Koordinaten entkoppelt sind. Sie lauten ausführlich:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_1 \\ \Delta \underline{U}_2 \\ \Delta \underline{U}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{I}_1 \\ \Delta \underline{I}_2 \\ \Delta \underline{I}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_0 \end{bmatrix}$$

Für jede Komponente läßt sich eine separate Ersatzschaltung, deren Struktur mit der Ersatzschaltung einer Einphasenleitung übereinstimmt, angeben. Wegen der Gleichheit der Parameter sind die Ersatzschaltungen des Mit- und Gegensystems identisch.

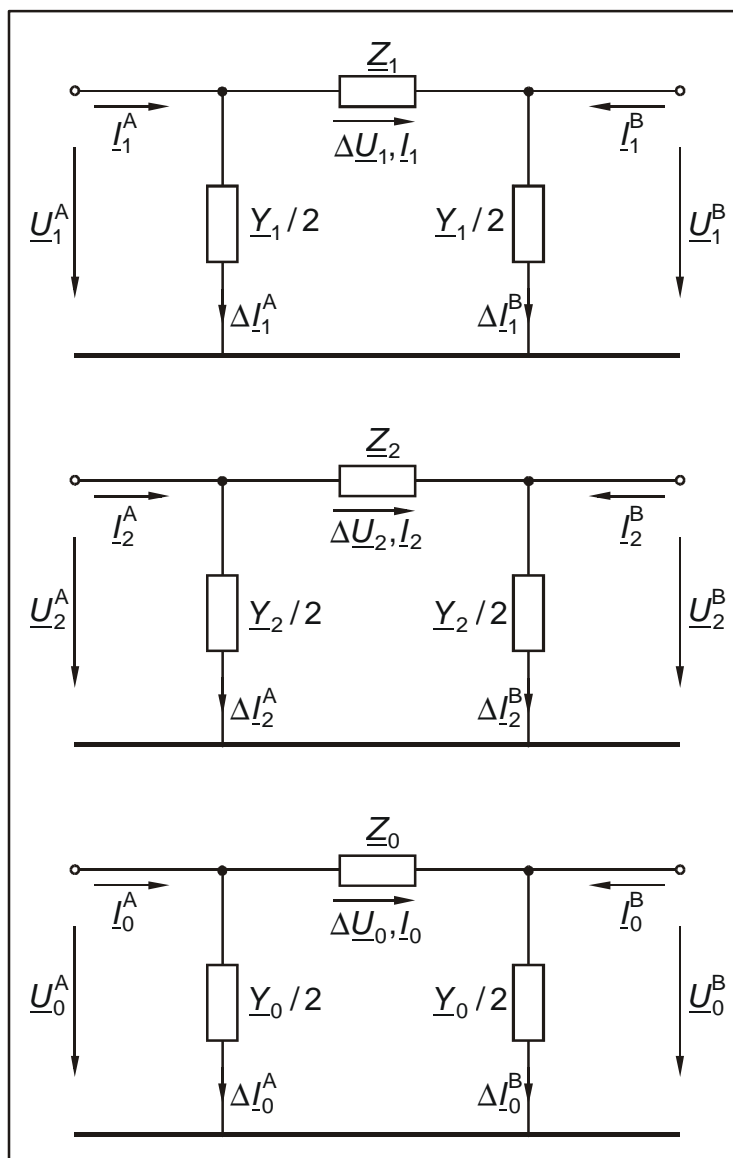


Bild 3.4:  $\Pi$ -Ersatzschaltung (Admittanzersatzschaltung) der Einphasenleitung

Bei Aufteilung der Ströme  $\Delta I_i (i = 1, 2, 0)$  auf Anfang und Ende der Leitung ergibt sich die  $\Pi$ -Ersatzschaltung in Bild 3.4. Eine andere häufig gebräuchliche Darstellungsform der Ersatzschaltungen zeigt Bild 3.5. Sie folgt durch die Auflösung der Admittanzen in  $1/2 Y_i = 1/2 (G_i + j\omega C_i)$ .

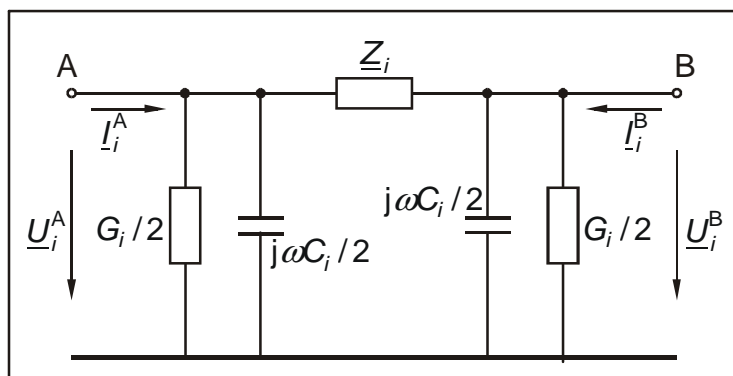


Bild 3.5: Ersatzschaltung der Symmetrischen Komponenten der ideal symmetrischen Einfachleitung mit Kapazitäten und Ableitwiderständen ( $i = 1, 2, 0$ )

Abschließend sei bemerkt, daß für die symmetrische Dreiphasen-Einfachleitung mit diagonal-zyklischer Struktur von  $\underline{\mathbf{Z}}$  und  $\underline{\mathbf{Y}}$  die anstelle der Gl. (2.3) tretende Matrixengleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_x \\ \underline{\mathbf{I}}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\underline{\mathbf{Z}}' \\ -\underline{\mathbf{Y}}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_x \\ \underline{\mathbf{I}}_x \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{U}}_x = \begin{bmatrix} \underline{U}_a^x & \underline{U}_b^x & \underline{U}_c^x \end{bmatrix}^T \quad (3.28)$$

$$\underline{\mathbf{I}}_x = \begin{bmatrix} \underline{I}_a^x & \underline{I}_b^x & \underline{I}_c^x \end{bmatrix}^T$$

nach Transformation in die symmetrischen Komponenten übergeht in

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_s^x \\ \underline{\mathbf{I}}_s^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\underline{\mathbf{Z}}_s' \\ -\underline{\mathbf{Y}}_s' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_s^x \\ \underline{\mathbf{I}}_s^x \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{U}}_s^x = \begin{bmatrix} \underline{U}_1^x & \underline{U}_2^x & \underline{U}_0^x \end{bmatrix}^T \quad (3.29)$$

$$\underline{\mathbf{I}}_s^x = \begin{bmatrix} \underline{I}_1^x & \underline{I}_2^x & \underline{I}_0^x \end{bmatrix}^T$$

mit

$$\underline{\mathbf{Z}}_s' = \text{diag}(\underline{Z}'_1 \quad \underline{Z}'_2 \quad \underline{Z}'_0) \quad \underline{Z}'_2 = \underline{Z}'_1$$

$$\underline{\mathbf{Y}}_s' = \text{diag}(\underline{Y}'_1 \quad \underline{Y}'_2 \quad \underline{Y}'_0) \quad \underline{Y}'_2 = \underline{Y}'_1$$

Gl. (3.29) zerfällt durch die Diagonalisierung der Impedanz- und Admittanzmatrix in drei Gleichungssysteme, die die Form von Gl. (2.3) haben. Somit wird die symmetrische Dreiphasenleitung im Bildbereich der Symmetrischen Komponenten durch drei entkoppelte Einphasenleitungen mit den Parametern ( $i = 1, 2, 0$ )

$$\underline{Z}'_i, \underline{Y}'_i, \underline{\gamma}_i = \sqrt{\underline{Z}'_i \underline{Y}'_i}, \underline{Z}_{wi} = \sqrt{\frac{\underline{Z}'_i}{\underline{Y}'_i}}$$

nachgebildet.

Folglich gelten auch alle in Kapitel 2 hergeleiteten Gleichungen und Ersatzschaltbilder für die Symmetrischen Komponenten der symmetrischen Dreiphasen-Einfachleitung. Damit stehen neben dem  $\Pi$ -Ersatzschaltbild mit konzentrierten Parametern, dessen Gültigkeit auf elektrisch kurze Leitungen beschränkt ist, auch die Ersatzschaltungen aus den Bildern 2.2, 2.3 und 2.6 für die Symmetrischen Komponenten der langen Leitung zur Verfügung.

## 4 Drehstrom-Doppelleitung

### 4.1 Induktive Verkettung

Für eine Drehstrom-Doppelleitung mit zwei Erdseilen und der Leiterbezeichnung nach Bild 4.1 ergibt sich für die Längsspannungsabfälle

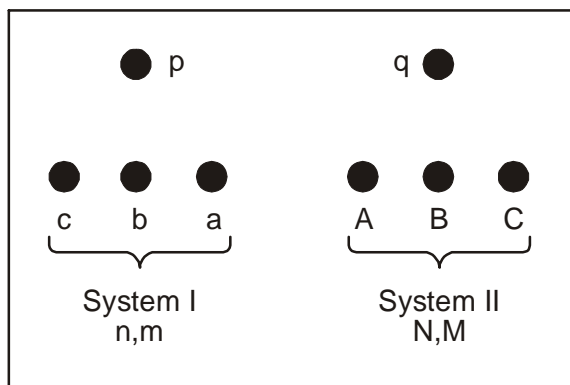


Bild 4.1: Spiegelsymmetrische Leiteranordnung bei der Doppelleitung mit 2 Erdseilen

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \\ \Delta \underline{U}_A \\ \Delta \underline{U}_B \\ \Delta \underline{U}_C \\ \Delta \underline{U}_p \\ \Delta \underline{U}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{aa} & \underline{Z}_{ab} & \underline{Z}_{ac} & \underline{Z}_{aA} & \underline{Z}_{aB} & \underline{Z}_{aC} & \underline{Z}_{ap} & \underline{Z}_{aq} \\ \underline{Z}_{ba} & \underline{Z}_{bb} & \underline{Z}_{bc} & \underline{Z}_{bA} & \underline{Z}_{bB} & \underline{Z}_{bC} & \underline{Z}_{bp} & \underline{Z}_{bq} \\ \underline{Z}_{ca} & \underline{Z}_{cb} & \underline{Z}_{cc} & \underline{Z}_{cA} & \underline{Z}_{cB} & \underline{Z}_{cC} & \underline{Z}_{cp} & \underline{Z}_{cq} \\ \underline{Z}_{Aa} & \underline{Z}_{Ab} & \underline{Z}_{Ac} & \underline{Z}_{AA} & \underline{Z}_{AB} & \underline{Z}_{AC} & \underline{Z}_{Ap} & \underline{Z}_{Aq} \\ \underline{Z}_{Ba} & \underline{Z}_{Bb} & \underline{Z}_{Bc} & \underline{Z}_{BA} & \underline{Z}_{BB} & \underline{Z}_{BC} & \underline{Z}_{Bp} & \underline{Z}_{Bq} \\ \underline{Z}_{Ca} & \underline{Z}_{Cb} & \underline{Z}_{Cc} & \underline{Z}_{CA} & \underline{Z}_{CB} & \underline{Z}_{CC} & \underline{Z}_{Cp} & \underline{Z}_{Cq} \\ \underline{Z}_{pa} & \underline{Z}_{pb} & \underline{Z}_{pc} & \underline{Z}_{pA} & \underline{Z}_{pB} & \underline{Z}_{pC} & \underline{Z}_{pp} & \underline{Z}_{pq} \\ \underline{Z}_{qa} & \underline{Z}_{qb} & \underline{Z}_{qc} & \underline{Z}_{qA} & \underline{Z}_{qB} & \underline{Z}_{qC} & \underline{Z}_{qp} & \underline{Z}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \\ \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \\ \underline{I}_p \\ \underline{I}_q \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_I \\ \Delta \underline{u}_{II} \\ \Delta \underline{u}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{II} & \underline{Z}_{IE} \\ \underline{Z}_{EI} & \underline{Z}_{EE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_I \\ \underline{i}_E \end{bmatrix}$$

Bei Verdrillung nach dem Schema  $\gamma$  (siehe Anhang 7.1) nimmt die Impedanzmatrix für die hier angenommene spiegelsymmetrische Leiteranordnung und symmetrische Anordnung der Erdseile zu den Leiterseilen (s. Bild 4.1) folgende Symmetrieeigenschaften an:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{nn} & \underline{Z}_{nm} & \underline{Z}_{nm} & \underline{Z}_{nN} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{nq} \\ \underline{Z}_{nm} & \underline{Z}_{nn} & \underline{Z}_{nm} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nN} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{nq} \\ \underline{Z}_{nm} & \underline{Z}_{nm} & \underline{Z}_{nn} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nN} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{nq} \\ \underline{Z}_{nN} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{NN} & \underline{Z}_{NM} & \underline{Z}_{NM} & \underline{Z}_{Np} & \underline{Z}_{Nq} \\ \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nN} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{NM} & \underline{Z}_{NN} & \underline{Z}_{NM} & \underline{Z}_{Np} & \underline{Z}_{Nq} \\ \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nM} & \underline{Z}_{nN} & \underline{Z}_{NM} & \underline{Z}_{NM} & \underline{Z}_{NN} & \underline{Z}_{Np} & \underline{Z}_{Nq} \\ \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{nq} & \underline{Z}_{nq} & \underline{Z}_{nq} & \underline{Z}_{pp} & \underline{Z}_{pq} \\ \underline{Z}_{nq} & \underline{Z}_{nq} & \underline{Z}_{nq} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{np} & \underline{Z}_{qp} & \underline{Z}_{qq} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Haben die beiden Systeme gleiche Seilbelegung, so wird noch  $\underline{Z}_{NN} = \underline{Z}_{nn}$  und  $\underline{Z}_{NM} = \underline{Z}_{nm}$ , d.h.  $\underline{Z}_{II} = \underline{Z}_{I}$ , sowie  $\underline{Z}_{qq} = \underline{Z}_{pp}$ .

Bei geerdeten Erdseilen können wegen  $\Delta \underline{u}_E = \mathbf{0}$  die Erdseilströme  $\underline{i}_E$  wieder - wie in Abschnitt 3.1 gezeigt - eliminiert werden, wodurch die Impedanzen der verbleibenden 6x6-Impedanzmatrix modifiziert werden:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_a \\ \Delta \underline{U}_b \\ \Delta \underline{U}_c \\ \Delta \underline{U}_A \\ \Delta \underline{U}_B \\ \Delta \underline{U}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{nn}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nN}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} \\ \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nn}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nN}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} \\ \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_{nn}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nN}^{pq} \\ \underline{Z}_{nN}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{NN}^{pq} & \underline{Z}_{NM}^{pq} & \underline{Z}_{NM}^{pq} \\ \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nN}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{NM}^{pq} & \underline{Z}_{NN}^{pq} & \underline{Z}_{NM}^{pq} \\ \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_{nN}^{pq} & \underline{Z}_{NM}^{pq} & \underline{Z}_{NM}^{pq} & \underline{Z}_{NN}^{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \\ \underline{I}_A \\ \underline{I}_B \\ \underline{I}_C \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_I \\ \Delta \underline{u}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{II}^E & \underline{Z}_{II}^E \\ \underline{Z}_{II}^E & \underline{Z}_{II}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_I \\ \underline{i}_{II} \end{bmatrix}$$

Bei Verdrillung nach dem aufwendigen Schema  $\beta$  (vollständige Verdrillung) werden auch noch die Gegenimpedanzen  $\underline{Z}_{nM}^{pq}$  und  $\underline{Z}_{nN}^{pq}$  gleich. Von einer *ideal symmetrischen* Doppelleitung spricht man, wenn ihre Impedanzmatrix diagonal-zyklisch symmetrisch, also wie folgt aufgebaut ist:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_s & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_s & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_s & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_s & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_s & \underline{Z}_g \\ \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_g & \underline{Z}_s \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

### 4.2 Kapazitive Verkettung

Aufgrund der Analogie zwischen den Gleichungen der Längsspannungsabfälle in Abhängigkeit von den Längsströmen und den Leiter-Erde-Spannungen als Funktion der Leiterladungen bzw. zwischen dem Aufbau der Impedanz- und Potentialkoeffizienten-Matrizen

können die Gleichungen für die kapazitive Verkettung der Doppelleitung sofort aufgeschrieben werden. Sie lauten für eine Doppelleitung mit zwei Erdseilen

$$\begin{bmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_{I I}^E & \underline{P}_{I II}^E \\ \underline{P}_{II I}^E & \underline{P}_{II II}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_I \\ \underline{q}_{II} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{i}_I \\ \Delta \underline{i}_{II} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} \underline{K}_{I I} & \underline{K}_{I II} \\ \underline{K}_{II I} & \underline{K}_{II II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_{II} \end{bmatrix} = j\omega \begin{bmatrix} \underline{C}_{I I} & \underline{C}_{I II} \\ \underline{C}_{II I} & \underline{C}_{II II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_{II} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

bzw. nach Erweiterung um die Ableitungsströme

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{i}_I \\ \Delta \underline{i}_{II} \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \underline{G}_{I I} & \underline{G}_{I II} \\ \underline{G}_{II I} & \underline{G}_{II II} \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \underline{C}_{I I} & \underline{C}_{I II} \\ \underline{C}_{II I} & \underline{C}_{II II} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{I I}^E & \underline{Y}_{I II}^E \\ \underline{Y}_{II I}^E & \underline{Y}_{II II}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_I \\ \underline{u}_{II} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Die Kapazitätsmatrix in Gl. (4.6) hat folgenden allgemeinen Aufbau ( $C_{ki} = C_{ik}$ ):

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} C_{aa} & -C_{ab} & -C_{ac} & -C_{aA} & -C_{aB} & -C_{aC} \\ -C_{ba} & C_{bb} & -C_{bc} & -C_{bA} & -C_{bB} & -C_{bC} \\ -C_{ca} & -C_{cb} & C_{cc} & -C_{cA} & -C_{cB} & -C_{cC} \\ \hline -C_{Aa} & -C_{Ab} & -C_{Ac} & C_{AA} & -C_{AB} & -C_{AC} \\ -C_{Ba} & -C_{Bb} & -C_{Bc} & -C_{BA} & C_{BB} & -C_{BC} \\ -C_{Ca} & -C_{Cb} & -C_{Cc} & -C_{CA} & -C_{CB} & C_{CC} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Ihre Elemente werden wie bei der Einfachleitung aus einem Vergleich mit der Matrix der Kapazitätskoeffizienten  $\underline{K}$  nach Gl. (4.6) berechnet. Die Matrix  $\underline{K}$  wird durch Inversion der Matrix der Potentialkoeffizienten  $\underline{P}$  in Gl. (4.5) erhalten. Da diese Berechnungen heute ausnahmslos mit dem Computer vorgenommen werden, lohnt es sich nicht die allgemeinen Beziehungen zwischen den Elementen dieser Matrizen hier anzuschreiben.

### 4.3 Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten

Die Transformation der modifizierten Spannungsgleichung der Doppelleitung mit der Impedanzmatrix nach Gl. (4.3) - i.f. jedoch ohne die besondere Kennzeichnung durch den Index E für die Modifizierung der Impedanzen - ergibt:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_s^I \\ \Delta \underline{u}_s^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_s^{-1} \underline{Z}_{I I} \underline{T}_s & \underline{T}_s^{-1} \underline{Z}_{I II} \underline{T}_s \\ \underline{T}_s^{-1} \underline{Z}_{II I} \underline{T}_s & \underline{T}_s^{-1} \underline{Z}_{II II} \underline{T}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_s^I \\ \underline{i}_s^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_s^{I I} & \underline{Z}_s^{I II} \\ \underline{Z}_s^{II I} & \underline{Z}_s^{II II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_s^I \\ \underline{i}_s^{II} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Es sollen im weiteren nur die verdrillte oder ideal symmetrische Doppelleitung betrachtet werden, bei der die Symmetrischen Komponenten vollständig oder wenigstens teilweise entkoppelt werden. Anderenfalls ist die Anwendung der Symmetrischen Komponenten auch nicht sinnvoll.

Bei Verdrillung nach dem  $\gamma$ -Schema ( $\gamma_1$  oder  $\gamma_2$ ) werden die Untermatrizen  $\underline{Z}_{I I}$ ,  $\underline{Z}_{I II}$ ,  $\underline{Z}_{II I}$  und  $\underline{Z}_{II II}$  jede für sich diagonal-zyklisch symmetrisch (s. Gl. (4.3)), weshalb die Gleichung (4.9) folgende ausführliche Form annimmt:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_1^I \\ \Delta \underline{U}_2^I \\ \Delta \underline{U}_0^I \\ \Delta \underline{U}_1^{II} \\ \Delta \underline{U}_2^{II} \\ \Delta \underline{U}_0^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1^{II} & 0 & 0 & \underline{Z}_1^{III} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2^{II} & 0 & 0 & \underline{Z}_2^{III} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0^{II} & 0 & 0 & \underline{Z}_0^{III} \\ \underline{Z}_1^{III} & 0 & 0 & \underline{Z}_1^{II} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2^{III} & 0 & 0 & \underline{Z}_2^{II} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0^{III} & 0 & 0 & \underline{Z}_0^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^I \\ \underline{I}_2^I \\ \underline{I}_0^I \\ \underline{I}_1^{II} \\ \underline{I}_2^{II} \\ \underline{I}_0^{II} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Die beiden Systeme bleiben nur noch jeweils innerhalb des Mit-, Gegen- und Nullsystems gekoppelt. Die Kopplungen zwischen den Symmetrischen Komponenten innerhalb eines Systems verschwinden. Die Symmetrischen Impedanzen der Untermatrizen berechnen sich analog zur Einfachleitung:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1^I &= \underline{Z}_{nn}^{pq} - \underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_1^{III} &= \underline{Z}_{NN}^{pq} - \underline{Z}_{NM}^{pq} \\ \underline{Z}_0^I &= \underline{Z}_{nn}^{pq} + 2\underline{Z}_{nm}^{pq} & \underline{Z}_0^{III} &= \underline{Z}_{NN}^{pq} + 2\underline{Z}_{NM}^{pq} \\ \underline{Z}_1^{II} &= \underline{Z}_{nN}^{pq} - \underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_1^{II} &= \underline{Z}_1^{II} \\ \underline{Z}_0^{II} &= \underline{Z}_{nN}^{pq} + 2\underline{Z}_{nM}^{pq} & \underline{Z}_0^{II} &= \underline{Z}_0^{II} \end{aligned} \quad (4.11)$$

wobei die Gegenimpedanzen wieder stets den Mitimpedanzen gleich sind.

Normalerweise haben die beiden Systeme der Doppelleitung die *gleiche Belegung* und sind an den Enden *parallelgeschaltet*. Es gilt dann ( $i = 1, 2, 0$ )

$$\underline{Z}_i^I = \underline{Z}_i^{III} = \underline{Z}_i^s$$

und

$$\begin{aligned} \Delta \underline{U}_i^I &= \Delta \underline{U}_i^{II} = \Delta \underline{U}_i^{DL} \\ \underline{I}_i^I &= \underline{I}_i^{II} = \frac{1}{2} \underline{I}_i^{DL} \end{aligned}$$

Für die Kopplungsimpedanzen schreiben wir der Einfachheit halber

$$\underline{Z}_i^{II} = \underline{Z}_i^{II} = \underline{Z}_i^g$$

und erhalten

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_1^{DL} = \frac{1}{2} (\underline{Z}_1^s + \underline{Z}_1^g) \underline{I}_1^{DL} = \underline{Z}_1^{DL} \underline{I}_1^{DL} \\ \Delta \underline{U}_2^{DL} = \frac{1}{2} (\underline{Z}_2^s + \underline{Z}_2^g) \underline{I}_2^{DL} = \underline{Z}_2^{DL} \underline{I}_2^{DL} \\ \Delta \underline{U}_0^{DL} = \frac{1}{2} (\underline{Z}_0^s + \underline{Z}_0^g) \underline{I}_0^{DL} = \underline{Z}_0^{DL} \underline{I}_0^{DL} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Bei Verdrillung nach dem  $\beta$ -Schema werden die Koppelimpedanzen des Mit- und Gegen-systems  $\underline{Z}_1^g = \underline{Z}_2^g$  wegen  $\underline{Z}_{nN}^{pq} = \underline{Z}_{nM}^{pq}$  Null und die Koppelimpedanz des Nullsystems wird

$$\underline{Z}_0^g = 3\underline{Z}_{nM}^{pq} \quad (4.13)$$

Die *ideal symmetrische* Doppelleitung mit der Impedanzmatrix nach Gl. (4.4) weist in der Parallelschaltung folgende Symmetrische Impedanzen auf:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1^{DL} &= \frac{1}{2} \underline{Z}_1^s = \frac{1}{2} (\underline{Z}_s - \underline{Z}_g) \\ \underline{Z}_2^{DL} &= \underline{Z}_1^{DL} \\ \underline{Z}_0^{DL} &= \frac{1}{2} (\underline{Z}_0^s + \underline{Z}_0^g) = \frac{1}{2} (\underline{Z}_s + 5\underline{Z}_g) \end{aligned} \tag{4.14}$$

Zur Berechnung der Kapazitäten ist es zweckmäßig, bereits die Gln. (4.5) und (4.6) in Symmetrische Koordinaten zu transformieren. Die transformierte Matrix der Potentialkoeffizienten  $\underline{P}_s$  hat für die verdrehte Doppelleitung mit spiegelsymmetrischer Leiteranordnung den gleichen Aufbau wie die Impedanzmatrix in Gl. (4.10), und ihre Elemente berechnen sich auch völlig analog zu den Beziehungen für die Symmetrischen Impedanzen in Gl. (4.11). Für die weiteren Umformungen fassen wir die Mit-, Gegen- und Nullgrößen der beiden Leitungssysteme jeweils wie folgt zusammen ( $i = 1, 2, 0$ ):

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_i^I \\ \underline{U}_i^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{P}_i^{II} & \underline{P}_i^{I0} \\ \underline{P}_i^{I0} & \underline{P}_i^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Q}_i^I \\ \underline{Q}_i^{II} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Die Auflösung nach den Ladungen ergibt

$$\begin{bmatrix} \underline{Q}_i^I \\ \underline{Q}_i^{II} \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{P}_i^{II} \underline{P}_i^{II} - \underline{P}_i^{I0} \underline{P}_i^{I0}} \begin{bmatrix} \underline{P}_i^{II} & -\underline{P}_i^{I0} \\ -\underline{P}_i^{I0} & \underline{P}_i^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_i^I \\ \underline{U}_i^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_i^{II} & \underline{K}_i^{I0} \\ \underline{K}_i^{I0} & \underline{K}_i^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_i^I \\ \underline{U}_i^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}_i^{II} & -\underline{C}_i^{I0} \\ -\underline{C}_i^{I0} & \underline{C}_i^{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_i^I \\ \underline{U}_i^{II} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Nach Bild 4.2 können wir wieder Teilkapazitäten für die Symmetrischen Komponenten einführen.

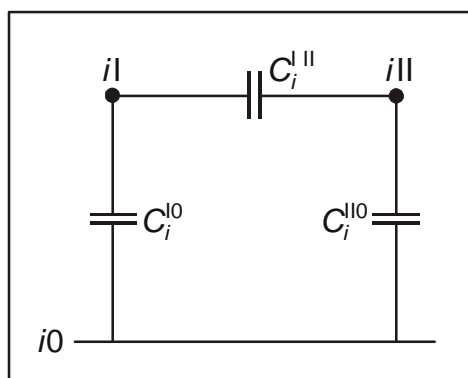


Bild 4.2: Teilkapazitäten für die Symmetrischen Komponenten der Doppelleitung ( $i = 1, 2, 0$ )

Aus dem Vergleich mit Gl. (4.16) folgt

$$\begin{aligned} \underline{C}_i^{II} &= \underline{C}_i^{I0} + \underline{C}_i^{II} = \underline{K}_i^{II} \\ \underline{C}_i^{I0} &= \underline{C}_i^{II0} + \underline{C}_i^{I0} = \underline{K}_i^{I0} \end{aligned} \tag{4.17}$$

und somit

$$\begin{aligned} \underline{C}_i^{I0} &= \underline{K}_i^{II} + \underline{K}_i^{I0} & \underline{C}_i^{II} &= -\underline{K}_i^{II} \\ \underline{C}_i^{II0} &= \underline{K}_i^{I0} + \underline{K}_i^{II} & \underline{C}_i^{I0} &= -\underline{K}_i^{I0} = \underline{C}_i^{II} \end{aligned} \tag{4.18}$$



Bei Verdrillung nach dem  $\beta$ -Schema werden die Koppelkondensatoren  $C_1^{II} = C_2^{II}$  zwischen den Leitungen wegen  $P_1^{II} = P_2^{II} = P_1^{III} = P_2^{III} = 0$  ebenfalls Null.

Für *gleiche, parallelgeschaltete* Stromkreise addieren sich die Querströme in jeder Komponente, und wir erhalten unter Hinzufügen der Verlustströme durch die Leitwerte

$$\begin{aligned}\Delta I_i^I + \Delta I_i^{II} &= \left[ (G_i^I - G_i^{II}) + j\omega(C_i^I - C_i^{II}) \right] \underline{U}_i^I + \left[ (G_i^{III} - G_i^{II}) + j\omega(C_i^{III} - C_i^{II}) \right] \underline{U}_i^{II} \\ &= (\underline{Y}_i^I + \underline{Y}_i^{II}) \underline{U}_i^I + (\underline{Y}_i^{III} + \underline{Y}_i^{II}) \underline{U}_i^{II}\end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned}\Delta I_i^I + \Delta I_i^{II} &= \Delta I_i^{DL} & \underline{U}_i^I &= \underline{U}_i^{II} = \underline{U}_i^{DL} \\ \underline{Y}_i^{III} &= \underline{Y}_i^I = \underline{Y}_i^S & \underline{Y}_i^{II} &= \underline{Y}_i^{III} = \underline{Y}_i^g\end{aligned}$$

schließlich

$$\begin{aligned}\Delta I_1^{DL} &= 2(\underline{Y}_1^S + \underline{Y}_1^g) \underline{U}_1^{DL} = \underline{Y}_1^{DL} \underline{U}_1^{DL} \\ \Delta I_2^{DL} &= 2(\underline{Y}_2^S + \underline{Y}_2^g) \underline{U}_2^{DL} = \underline{Y}_2^{DL} \underline{U}_2^{DL} \\ \Delta I_0^{DL} &= 2(\underline{Y}_0^S + \underline{Y}_0^g) \underline{U}_0^{DL} = \underline{Y}_0^{DL} \underline{U}_0^{DL}\end{aligned} \tag{4.19}$$

Diese Gleichungen sind dual zu den Gleichungen (4.12) für die Längsspannungen der parallelgeschalteten Stromkreise mit gleicher Belegung und spiegelsymmetrischer Leiteranordnung am Mast.

Wegen  $\underline{Y}_i^S = \underline{Y}_i^{I0} - \underline{Y}_i^{II} = \underline{Y}_i^{I0} - \underline{Y}_i^{III}$  fallen aus den Admittanzen  $\underline{Y}_1^{DL} = \underline{Y}_2^{DL}$  und  $\underline{Y}_0^{DL}$  für die parallelgeschalteten Leitungen die Koppellemente zwischen den Leitungen heraus und es wird

$$\begin{aligned}\underline{Y}_1^{DL} &= 2(\underline{G}_1 + j\omega \underline{C}_1) = \underline{Y}_2^{DL} \\ \underline{Y}_0^{DL} &= 2(\underline{G}_0 + j\omega \underline{C}_0)\end{aligned} \tag{4.20}$$

wenn mit  $G_i = G_i^{I0}$  und  $C_i = C_i^{I0}$  die Leitwerte bzw. Kapazitäten einer der beiden Leitungen gegen den Bezugsknoten bezeichnet werden. Diese Abhängigkeit der Admittanzen der Doppelleitung ist auch sofort aus Bild 4.2 ersichtlich, denn bei gleicher Spannung auf den Leitungen sind die Koppelkapazitäten unwirksam, und die Kapazitäten zwischen Leitung und Bezugsknoten können zusammengefaßt werden (ad-diert) werden. Die Leitwerte liegen parallel zu den Kapazitäten, so daß für sie das Gleiche gilt.

Auf der Grundlage der Gln. (4.12) und (4.19) ergeben sich nach Aufteilung der Querströme  $\Delta I_i^{DL}$  auf die beiden Leitungsenden wieder drei entkoppelte II-Ersatzschaltungen für die Symmetrischen Komponenten wie sie in den Bildern 3.4 und 3.5 für die Einfachleitung dargestellt sind. Es ist lediglich zu beachten, daß die Ströme  $I_j^x$  an jeder Stelle  $x$  die Gesamtströme der parallelgeschalteten verdrillten Systeme, für die gleiche Belegung und spiegelsymmetrische Leiteranordnung vorausgesetzt werden, sind, und daß die Impedanzen und Admittanzen von der Art der Verdrillung abhängen. Nur im Fall der *ideal symmetrischen Doppelleitung* - der praktisch allerdings nicht vorkommt - werden im Mit- und Ge-

gensystem bei *Parallelschaltung* der beiden Leitungen (DL Doppelleitung, EL Betrieb der DL als Einfachleitung)

$$\underline{Z}_1^{\text{DL}} = \underline{Z}_2^{\text{DL}} = 2\underline{Z}_1^{\text{EL}} = \frac{1}{2}\underline{Z}_2^{\text{EL}} = \frac{1}{2}(\underline{Z}_s^{\text{EL}} - \underline{Z}_g^{\text{EL}})$$

$$\underline{Y}_1^{\text{DL}} = \underline{Y}_2^{\text{DL}} = 2\underline{Y}_1^{\text{EL}} = 2\underline{Y}_2^{\text{EL}} = 2(\underline{Y}_s^{\text{EL}} - \underline{Y}_g^{\text{EL}})$$

während im Nullsystem wegen der nicht verschwindenden Kopplung zwischen den Leitungen

$$\underline{Z}_0^{\text{DL}} = \frac{1}{2}(\underline{Z}_s^{\text{EL}} + 5\underline{Z}_g^{\text{EL}}) \neq \frac{1}{2}\underline{Z}_0^{\text{EL}} = \frac{1}{2}(\underline{Z}_s^{\text{EL}} + 2\underline{Z}_g^{\text{EL}})$$

$$\underline{Y}_0^{\text{DL}} = 2(\underline{Y}_s^{\text{EL}} + 5\underline{Y}_g^{\text{EL}}) \neq 2\underline{Y}_0^{\text{EL}} = 2(\underline{Y}_s^{\text{EL}} + 2\underline{Y}_g^{\text{EL}})$$

gilt.

## 5 Berechnung der Leitungsparameter

### 5.1 Schleifenimpedanzen

Nach CARSON enthalten die *Selbstimpedanz* einer Leiter-Erde-Schleife (die die Diagonalelemente der Impedanzmatrix bilden) und die *Gegenimpedanzen* zwischen zwei Leiter-Erde-Schleifen (die die Nichtdiagonalelemente der Impedanzmatrix bilden) je einen rein *geometrischen* Anteil  $Z_G$ , der für ideal leitfähige Leiter und ideal leitfähige Erde gelten würde, und einen zusätzlichen frequenzabhängigen *Erdkorrekturanteil*  $\Delta Z$ , der die endliche Leitfähigkeit der Erde und die damit verbundenen Stromverdrängungs- und Naheffekte im Erdboden berücksichtigt. Die Selbstimpedanzen enthalten noch einen weiteren Term, die sogenannte *innere Impedanz*  $Z_L$ , die den Anteil des Magnetfelds im realen Leiter erfaßt.

Der dielektrische Verschiebungsstrom in der Erde kann im Frequenzbereich bis 500 kHz vernachlässigt werden, so daß  $\epsilon_E = \epsilon_0$  gesetzt werden darf.

Die allgemeinen Ausdrücke für die längenbezogenen Impedanzen setzen sich somit wie folgt zusammen:

$$Z_{ii} = R_{ii}(\omega) + j\omega L_{ii}(\omega) = Z_{Gii} + \Delta Z_{ii} + Z_{Li} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} (N_{ii} + F_{ii}(\omega) + M_i(\omega)) \tag{5.1}$$

$$Z_{ik} = R_{ik}(\omega) + j\omega L_{ik}(\omega) = Z_{Gik} + \Delta Z_{ik} = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} (N_{ik} + F_{ik}(\omega)) \tag{5.2}$$

Zur Berechnung der *Geometriekoeffizienten*  $N_{ii}$  und  $N_{ik}$  der geometrischen Anteile bei ideal leitfähig angenommener Erde und ideal leitfähig angenommenem Leiter dient das Spiegelmodell in Bild 5.1, in dem die Erdströme in widerstandslosen Spiegelleitern konzentriert sind.

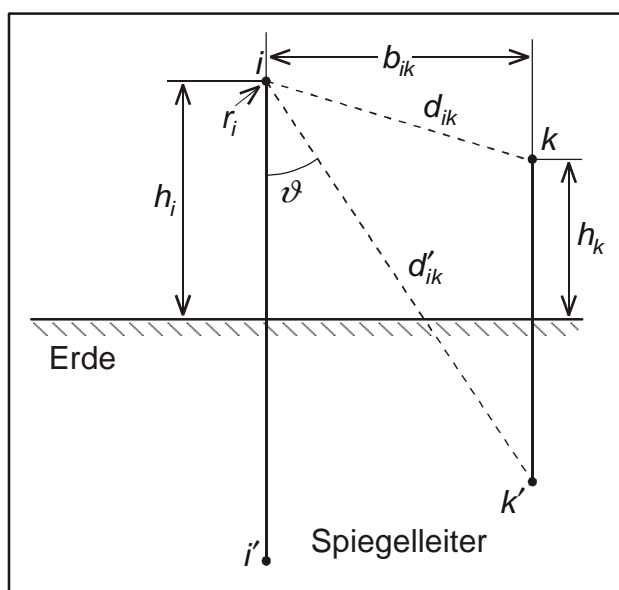


Bild 5.1: An der Erdoberfläche gespiegelte 2-Leiteranordnung

Man erhält:

$$N_{ij} = \ln \frac{2h_i}{r_j}; \quad N_{ik} = \ln \frac{d_{ik}^i}{d_{ik}}. \quad (5.3)$$

Die innere Impedanz kann für runde Massivleiter mit dem Radius  $r_i$  näherungsweise berechnet werden aus :

$$Z_{Li} = R_{Li}^i + j\omega L_{Li}^i = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} M_i = 0,74 R_{gi}^i \left( \sqrt{m_i + 1} + j \sqrt{m_i - 1} \right), \quad (5.4)$$

wobei:

$$R_{gi}^i = \frac{1}{\kappa_i \pi r_i^2}$$

der längenbezogene *Gleichstromwiderstand*,  $R_{Li}^i$  der längenbezogene *Wechselstromwiderstand* und  $L_{Li}^i$  die längenbezogene innere Induktivität sind. Für  $m_i$  steht:

$$m_i = \sqrt{1 + \left( \frac{\psi_i}{2} \right)^4} \quad \text{mit} \quad \psi_i = r_i \sqrt{\omega \mu_i \kappa_i} = r_i \alpha_i.$$

Die Erdkorrekturanteile sind Ausdrücke der Form:

$$\Delta Z = j\omega \frac{\mu_0}{2\pi} F = \omega \frac{\mu_0}{\pi} J = \omega \frac{\mu_0}{\pi} (P + jQ),$$

in der  $J$  die CARSONSchen *Integrale* sind. In der neueren Literatur werden meist die Integrale  $F$  angegeben. Sie lauten mit den Bezeichnungen des Bildes 5.1:

$$F_{ii} = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-2h_i \lambda}}{\sqrt{\lambda^2 + j\alpha^2} + \lambda} d\lambda$$

$$F_{ik} = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-2(h_i + h_k) \lambda}}{\sqrt{\lambda^2 + j\alpha^2} + \lambda} \cos(\lambda b_{ik}) d\lambda$$

und gehen durch die Substitution  $\lambda = \alpha \nu$  und die Beziehungen  $\sin \vartheta = b_{ik} / d_{ik}^i$ ,  $\cos \vartheta = (h_i + h_k) / d_{ik}^i$  sowie die Abkürzung  $x = 2h_i \alpha$  bzw.  $x = d_{ik}^i \alpha$  mit  $\alpha = \sqrt{\omega \mu_0 \kappa_i}$  über in (wenn für die Integrationsvariable  $\nu$  wieder  $\lambda$  geschrieben wird) die CARSONSchen Integrale:

$$J_{ii} = \int_0^{\infty} \left( \sqrt{\lambda^2 + j} - \lambda \right) e^{-\lambda x} d\lambda = P_{ii} + jQ_{ii}$$

$$J_{ik} = \int_0^{\infty} \left( \sqrt{\lambda^2 + j} - \lambda \right) e^{-\lambda x \cos \vartheta} (\cos \lambda x \sin \vartheta) d\lambda = P_{ik} + jQ_{ik}$$

Für die frequenzabhängigen Real- und Imaginärteile  $P$  und  $Q$  der CARSON-Integrale sind in der Literatur Reihenentwicklungen angegeben, die im Anhang (Abschnitt 7.3) wiedergegeben sind.

Bei *Betriebsfrequenz*  $\omega_0$  und normal ausgeführten Leitungen sind  $x(x \leq 0,2)$  und  $\vartheta$  so klein, daß  $P$  und  $Q$  jeweils durch das erste Glied ihrer Reihe approximiert werden können:

$$P = \frac{\pi}{8} \quad (5.5)$$

$$Q = \frac{1}{2} (k - \ln x) = \frac{1}{2} \ln \frac{e^k}{x}, \quad (5.6)$$

mit  $x = 2h_i \sqrt{\omega_0 \mu_0 \kappa_E}$  0 für  $Q_{ii}$  und  $x = d'_{ik} \sqrt{\omega_0 \mu_0 \kappa_E}$  0 für  $Q_{ik}$

sowie  $k = 1/2 + \ln 2 - C = 0,61593\dots$ , wobei  $C = 0,577215$  die EULERSche Konstante ist. Nach Einsetzen der Gln. (5.4) bis Gl. (5.6) in Gl. (5.1) bzw. Gl. (5.2) erhält man für die Impedanzen bei Betriebsfrequenz (die Impedanzen bei Betriebsfrequenz werden i. f. unterstrichen):

$$\underline{Z}_{ii} = R_{Li} + \frac{\omega_0 \mu_0}{8} + j\omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{2h_i}{r_i} + \ln \frac{e^k}{2h_i \sqrt{\omega_0 \mu_0 \kappa_E}} \right) + jX_{Li} \quad (5.7)$$

$$\underline{Z}_{ik} = \frac{\omega_0 \mu_0}{8} + j\omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{d'_{ik}}{d_{ik}} + \ln \frac{e^k}{d'_{ik} \sqrt{\omega_0 \mu_0 \kappa_E}} \right) \quad (5.8)$$

und nach Einführung des längenbezogenen *Erdbodenwiderstands*:

$$R_E = \frac{\omega_0 \mu_0}{8} \quad (5.9)$$

und der Eindringtiefe:

$$\delta = \frac{e^k}{\sqrt{\omega_0 \mu_0 \kappa_E}} = \frac{1,8514}{\sqrt{\omega_0 \mu_0 \kappa_E}} = \frac{0,7386}{\sqrt{f_0 \mu_0 \kappa_E}} \quad (5.10)$$

$$\underline{Z}_{ii} = R_{Li} + R_E + j \left( \omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{r_i} + X_{Li} \right) = R_{ii} + jX_{ii} \quad (5.11)$$

$$\underline{Z}_{ik} = R_E + j\omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{ik}} = R_{ik} + jX_{ik} \quad (5.12)$$

Man bezeichnet die von der Eindringtiefe  $\delta$  abhängigen Anteile auch gelegentlich als *äußere* Reaktanzen. Sie fassen die geometrischen Anteile und die CARSONSchen Korrekturglieder  $Q$  zusammen.

Im Bereich der Betriebsfrequenz gilt für die innere Impedanz nichtmagnetischer Leiter die Näherung:

$$\underline{Z}_{Li}^i = R_{gi}^i \left( 1 + j \frac{1}{2} \left( \frac{\Psi_i}{2} \right)^2 \right) = R_{gi}^i + j \omega_0 \frac{1}{4} \frac{\mu_0}{2\pi} \quad (5.13)$$

Der Widerstand  $R_{Li}^i$  in Gl. (5.11) nimmt dann den Wert des Gleichstromwiderstands an.

Leitungen ab 220 kV werden meist mit *Bündelleitern* ausgerüstet. Diese gehen mit einem Ersatzradius  $r_B$  anstelle  $r_i$  in Gl. (5.11) ein. Der Ersatzradius berechnet sich bei  $n$  Teilleitern, die auf einem Kreis mit dem Teilleiterradius  $r_T$  (siehe Bild 5.2) angeordnet sind und den Leiterradius  $r$  haben, nach:

$$r_B = \sqrt[n]{n r r_T^{n-1}} \quad (5.14)$$

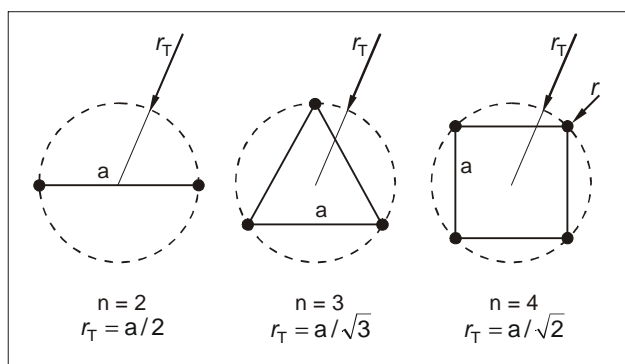


Bild 5.2: Bündelleiteranordnungen

Da die  $n$  Bündelleiter elektrisch parallel geschaltet sind, ist Gl. (5.11) für Bündelleiter bei  $R_{Li}^i$  und  $X_{Li}^i$  auch noch mit dem Faktor  $1/n$  zu versehen und lautet dann:

$$\underline{Z}_{ii} = \frac{1}{n} R_{Li}^i + R_E^i + j \left( \omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{r_B} + \frac{1}{n} X_{Li}^i \right) \quad (5.11a)$$

Ist die Leitung verdreht, so durchlaufen alle Leiter pro Umlauf alle möglichen Plätze am Mast. Die gesamte Impedanz ergibt sich aus der Summe der Impedanzen über die Verdrehungsabschnitte. So gilt z. B. für die mittleren Gegenimpedanzen einer  $\alpha_1$ -verdrehten Einfachleitung pro Längeneinheit:

$$\begin{aligned} X_{ik}^i &= X_{nm}^i = \omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{3} \left( \ln \frac{\delta}{d_{ab}} + \ln \frac{\delta}{d_{bc}} + \ln \frac{\delta}{d_{ca}} \right) \\ &= \omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{\sqrt[3]{d_{ab} d_{bc} d_{ca}}} = \omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{nm}} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Das Bild 5.3 zeigt, wie in diesem Fall der wirksame Leiterabstand  $d_{nm}$  als geometrisches Mittel der Einzelabstände zu ermitteln ist.

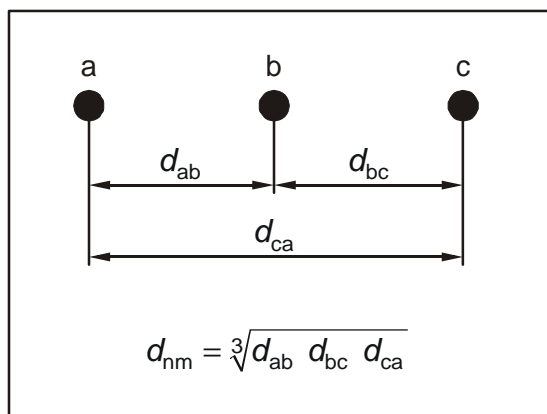


Bild 5.3: Ermittlung des wirksamen Leiterabstands der verdrehten Einfachleitung

Die geometrische Mittelwertbildung ist analog für alle Gegenimpedanzen, z. B.  $d_{np}$  für  $\underline{Z}_{np}$  und  $d_{nn}$  für  $\underline{Z}_{nn}$  und ebenso für die Potentialkoeffizienten heranzuziehen.

Zur praktischen Rechnung sind noch folgende zugeschnittenen Größengleichungen für die Anteile der Schleifenimpedanzen bei 50 Hz nützlich ( $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-4} \text{ H/km}$ ):

$$\begin{aligned}
 X_{ii}^l &= 0,02\pi \ln \frac{\delta}{r_i} \frac{\Omega}{\text{km}} + X_{Li}^l \\
 X_{ik}^l &= 0,02\pi \ln \frac{\delta}{d_{ik}} \frac{\Omega}{\text{km}} \\
 X_{Li}^l &= 5\pi \cdot 10^{-3} \frac{\Omega}{\text{km}} \quad \text{bzw.} \quad L_{Li}^l = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} \frac{\text{H}}{\text{km}} \\
 R_E^l &= 5\pi^2 \cdot 10^{-3} \frac{\Omega}{\text{km}} \approx 50 \frac{\text{m}\Omega}{\text{km}} \\
 \delta &= \frac{931,8}{\sqrt{\kappa_E / (\text{S/cm})}} \text{ cm}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Die Leitfähigkeit der Erde beträgt in Mitteleuropa durchschnittlich etwa  $\kappa_E = 10^{-4} \text{ S/cm}$ , so daß die Eindringtiefe in der Größenordnung von 932 m liegt.

## 5.2 Potentialkoeffizienten

Die Berechnung der längenbezogenen Potential-Selbst- und -Gegenkoeffizienten erfolgt wieder mit den Geometrie-Koeffizienten  $N_{ij}$  und  $N_{ik}$  aus Gl. (5.3):

$$P_{ii}^l = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} N_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_i}{r_i} \tag{5.17}$$

$$P_{ik}^l = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} N_{ik} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d_{ik}^l}{d_{ik}} \tag{5.18}$$

Der fiktive Leiterabstand  $d_{ik}^l$  kann nach Bild 5.1 ausgedrückt werden durch:

$$d'_{ik} = \sqrt{(h_i + h_k)^2 + b_{ik}^2} = \sqrt{(h_i + h_k)^2 - (h_i - h_k)^2 + d_{ik}^2} = \sqrt{d_{ik}^2 + 4h_i h_k}$$

Damit wird:

$$P'_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(1 + 4 \frac{h_i h_k}{d_{ik}^2}\right). \quad (5.19)$$

Bündelleiter gehen wieder mit  $r_B$  anstelle  $r_i$  in Gl.(5.17) und verdrehte Leitungen mit dem entsprechenden geometrischen Mittel der Leiterabstände in Gl. (5.19) ein. Für  $h_i$  und  $h_k$  werden mittlere Leiterhöhen eingesetzt, die auch den Durchhang  $\Delta h_i$  bei einer mittleren Jahrestemperatur berücksichtigen:

$$h_i = h_{i\max} - 0,7\Delta h_i. \quad (5.20)$$

Mit  $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-9} \text{ F/km}$  erhält man die zugeschnittenen Größengleichungen (mit der Näherung  $17,975 \approx 18$ ):

$$\boxed{\begin{aligned} P'_{ii} &= 18 \ln \frac{2h_i}{r_i} \frac{\text{km}}{\mu\text{F}} \\ P'_{ik} &= 9 \ln \left(1 + 4 \frac{h_i h_k}{d_{ik}^2}\right) \frac{\text{km}}{\mu\text{F}}. \end{aligned}} \quad (5.21)$$

Im Gegensatz zu den Impedanzen sind die Potentialkoeffizienten nicht frequenzabhängig, solange die Verschiebungsströme in der Erde vernachlässigt werden können.

Die Inverse der Potentialmatrix, deren Elemente die Potentialkoeffizienten sind, ist die Kapazitätsmatrix  $\mathbf{K} = \mathbf{P}^{-1}$  mit den Kapazitätskoeffizienten  $K_{ii}$  und  $K_{ik}$  ( $k \neq i$ ) als Elemente. Unter Hinzufügung von Leitwerten für die Berücksichtigung der Ableitungsverluste (bzw. der dielektrischen Verluste bei Kabeln) und der Koronaverluste erhält man für die längenbezogenen *Selbst-* und *Gegenadmittanzen*:

$$Y'_{ii} = G'_{ii} + j\omega K'_{ii} = G'_{ii} + j\omega C'_{ii}$$

$$Y'_{ik} = -G'_{ik} + j\omega K'_{ik} = -G'_{ik} - j\omega C'_{ik}$$

Zwischen den Kapazitätskoeffizienten und den *Teilkapazitäten* besteht folgender Zusammenhang:

$$C'_{ii} = K'_{ii}$$

$$C'_{ik} = -K'_{ik} \quad \text{Leiter-Leiter-Kapazitäten}$$

$$C'_{iE} = K'_{ii} + \sum K'_{ik} \quad \text{Leiter-Erde-Kapazitäten.}$$



## 5.3 Impedanzen der Symmetrischen Komponenten

### 5.3.1 Einfachleitung

Die Leitung sei verdreht. Eventuell vorhandene Erdseile sollen symmetrisch zu den Leitern angeordnet sein. Die Zahl der Teilleiter bei Bündelleitern sei  $n$ . Für die mittleren Selbst- und Gegenimpedanzen gilt dann zunächst ohne Erdseile:

$$\underline{Z}_{nn} = \frac{1}{n} R_L' + R_E' + j \left( \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{r_B} + \frac{1}{n} X_L' \right) \quad (5.22)$$

$$\underline{Z}_{nm} = R_E' + j \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{nm}} \quad (5.23)$$

mit

$$d_{nm} = \sqrt[3]{d_{ab} d_{bc} d_{ca}} \quad (5.24)$$

Die Impedanzen der Erdseile und Gegenimpedanzen zwischen den Erdseilen und den Leiterseilen berechnen sich analog. So ist z.B. für die Gegenimpedanzen  $\underline{Z}_{np}$  der mittlere Abstand

$$d_{np} = \sqrt[3]{d_{ap} d_{bp} d_{cp}} \quad (5.25)$$

maßgebend.

Unter dem Einfluß *eines* Erdseiles p wird

$$\underline{Z}_{nn}^p = \underline{Z}_{nn} - \frac{\underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp}} \quad \underline{Z}_{nm}^p = \underline{Z}_{nm} - \frac{\underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp}} \quad (5.26)$$

und bei *zwei* symmetrisch angeordneten Erdseilen p und q

$$\underline{Z}_{nn}^{pq} = \underline{Z}_{nn} - \frac{2\underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq}} \quad \underline{Z}_{nm}^{pq} = \underline{Z}_{nm} - \frac{2\underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq}} \quad (5.27)$$

### Mit- und Gegenimpedanzen

Aus  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{nn} - \underline{Z}_{nm}$  folgt mit  $R_L' / n = R_1'$  für die kilometrischen Werte

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{1}{n} R_L' + j \left( \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{nm}}{r_B} + \frac{1}{n} X_L' \right) = R_1' + j X_1' \quad (5.28)$$

Wie zu erwarten, gehen der Erdbodenwiderstand und der Einfluß der Erdseile nicht in die Mit- und Gegenimpedanzen ein, denn bei Betrieb der Leitung mit einem reinen Mit- oder Gegensystem sind die Erde und auch die Erdseile stromlos.

Nullimpedanz

Ohne Erdseile gilt  $\underline{Z}'_0 = \underline{Z}'_{nn} + 2\underline{Z}'_{nm}$  und somit

$$\underline{Z}'_0 = \frac{1}{n} R'_L + 3R'_E + j \left( \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta^3}{r_B d_{nm}^2} + \frac{1}{n} X'_L \right) = R'_0 + jX'_0 \quad (5.29)$$

Mit *einem* Erdseil wird

$$\underline{Z}'_0^p = \underline{Z}'_{nn} + 2\underline{Z}'_{nm} = \underline{Z}'_0 - 3 \frac{\underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp}} \quad (5.30)$$

und mit *zwei* Erdseilen

$$\underline{Z}'_0^{pq} = \underline{Z}'_{nn} + 2\underline{Z}'_{nm} = \underline{Z}'_0 - 3 \frac{2\underline{Z}_{np}^2}{\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq}} \quad (5.31)$$

wobei  $\underline{Z}'_0$  jeweils die Nullimpedanz *ohne* Erdseile nach Gl. (5.29) ist.

Der Erdwiderstand geht in  $\underline{Z}'_0$  dreifach ein, denn der Erdstrom beträgt das Dreifache des Nullstromes. Erdseile entlasten die Erde als Rückleiter, so daß die Nullimpedanz unter ihrem Einfluß kleiner wird.

**5.3.2 Doppelleitung\***

Wir nehmen die Doppelleitung wieder verdreht an und setzen spiegelsymmetrische Leiteranordnung, gleiche Belegung der Leitungen (Systeme) und bei Erdseilen deren symmetrische Anordnung zu den Leiterseilen voraus. Die *mittleren* Impedanzen berechnen sich dann aus

$$\underline{Z}'_{nn} = \underline{Z}'_{NN} = \frac{1}{n} R'_L + R'_E + j \left( \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{r_B} + \frac{1}{n} X'_L \right) \quad \text{s. (5.22)}$$

$$\underline{Z}'_{nm} = \underline{Z}'_{NM} = R'_E + j \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{nm}} \quad \text{s. (5.23)}$$

$$\underline{Z}'_{nN} = R'_E + j \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{nN}} \quad (5.32)$$

$$\underline{Z}'_{nM} = R'_E + j \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{nM}} \quad (5.33)$$

$$\underline{Z}'_{np} = R'_E + j \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{np}} \quad (5.34)$$

Die Formeln für  $\underline{Z}'_{pp} = \underline{Z}'_{qq}$  und  $\underline{Z}'_{pq}$  entsprechen denen für  $\underline{Z}'_{nn}$  und  $\underline{Z}'_{nm}$ . Die Berechnung der mittleren Abstände  $d_{nN}$  und  $d_{nM}$  verdeutlicht Bild 5.4

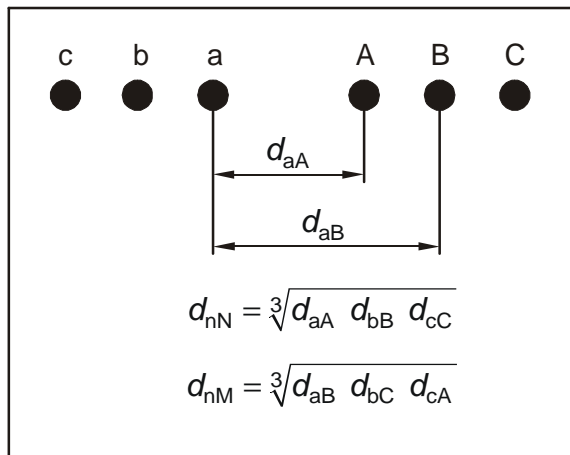


Bild 5.4: Mittlere Leiterabstände bei der Doppelleitung

### Mit- und Gegenimpedanz

Falls die beiden gleich angenommenen Leitungen an den Leitungsenden *parallelgeschaltet* sind, erhält man für die Mitimpedanz *pro Leitung*:

$$\underline{Z}'_1 = \underline{Z}'_1^I + \underline{Z}'_1^{II} = \underline{Z}'_1^{III} + \underline{Z}'_1^{II} = \underline{Z}_{nn} - \underline{Z}_{nm} + \underline{Z}_{nN} - \underline{Z}_{nM}$$

und nach Einsetzen der Gleichungen für die Impedanzen und Zusammenfassen der logarithmischen Terme:

$$\underline{Z}'_1 = \underline{Z}'_2 = \frac{1}{n} R'_L + j \left( \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{d_{nm}}{r_B} \frac{d_{nM}}{d_{nN}} + \frac{1}{n} X'_L \right) = R'_1 + jX'_L \tag{5.35}$$

Der Ausdruck Gl. (5.35) ist bis auf den Quotient  $d_{nM} / d_{nN}$  mit der Gl. (5.29) für die Mitimpedanz der Einfachleitung identisch. Da  $d_{nM} > d_{nN}$  (s. Bild 5.4) ist, ist die Mitimpedanz für *eine* Leitung einer Doppelleitung geringfügig größer als die einer gleichen Einfachleitung (oder einer Doppelleitung bei abgeschalteter zweiter Leitung).

Lediglich bei der aufwendigen Verdrillung  $\beta$  wird  $d_{nM} = d_{nN}$ , so daß die Mitimpedanz *einer* Leitung der Doppelleitung exakt den Wert der Einfachleitung annimmt.

In Übereinstimmung mit Gl. (4.12) wird die gesamte Mitimpedanz der Doppelleitung

$$\underline{Z}'_{1DL} = \frac{1}{2} \underline{Z}'_1$$

### Nullimpedanzen

Pro Leitung der parallelgeschalteten  $\gamma$ -verdrillten Doppelleitung ergibt sich

$$\underline{Z}'_0 = \underline{Z}'_0^I + \underline{Z}'_0^{II} = \underline{Z}'_0^{III} + \underline{Z}'_0^{II} = \underline{Z}_{nn} + 2\underline{Z}_{nm} + \underline{Z}_{nN} + 2\underline{Z}_{nM}$$

Ohne Erdseile wird

$$\underline{Z}'_0 = \frac{1}{n} R'_L + 3R'_E + j \left( \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta^3}{r_B d_{nm}^2} + \frac{1}{n} X'_L \right) + 3 \left( R'_E + j \omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{d_{nNM}} \right) \quad (5.36)$$

Die ersten drei Terme der Gl. (5.36) entsprechen der Nullimpedanz der Einfachleitung, während der letzte Term die im Nullsystem nicht verschwindende Kopplung mit der zweiten Leitung ausdrückt. Der mittlere Abstand  $d_{nNM}$  berechnet sich aus

$$d_{nNM} = \sqrt[3]{d_{nN} d_{nM}^2}$$

Im Fall der  $\beta$ -Verdrillung wird  $d_{nNM} = d_{nN} = d_{nM}$ .

Erdseile verringern die Nullimpedanz. Wenn  $\underline{Z}'_0$  die Nullimpedanz *eines* Leitungssystems *ohne* Erdseile ist, so reduziert *ein* Erdseil diese auf

$$\underline{Z}'_0^p = \underline{Z}'_0 - 3 \frac{\underline{Z}'_{np}}{\underline{Z}'_{pp}} \quad (5.37)$$

während *zwei* Erdseile eine Reduzierung auf (s. Anhang 7.2):

$$\underline{Z}'_0^{pq} = \underline{Z}'_0 - 3 \frac{(\underline{Z}'_{np} + \underline{Z}'_{nq})^2}{\underline{Z}'_{pp} + \underline{Z}'_{pq}} = \underline{Z}'_0 - 3 \frac{2\underline{Z}'_{npq}}{\underline{Z}'_{pp} + \underline{Z}'_{pq}} \quad (5.38)$$

bewirken. Die maßgebenden mittleren Abstände zwischen den Leitern und dem Erdseil bzw. den Erdseilen sind

$$d_{np} = d_{Np} = \sqrt[3]{d_{ap} d_{bp} d_{cp}} = \sqrt[3]{d_{Ap} d_{Bp} d_{Cp}}$$

$$d_{npq} = \sqrt[6]{d_{ap} d_{bp} d_{cp} d_{aq} d_{bq} d_{cq}}$$

## 5.4 Admittanzen der Symmetrischen Komponenten

### 5.4.1 Einfachleitung

Die *mittleren* Potentialkoeffizienten der verdrillten Bündelleiter-Leitung *ohne* Erdseile werden mit den geometrischen Mittelwerten der Leiterhöhen und -abständen:

$$P'_{nn} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_n}{r_B} \quad (5.39)$$

$$P'_{nm} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{d'_{nm}}{d_{nm}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( 1 + 4 \frac{h_n h_m}{d_{nm}^2} \right) \quad (5.40)$$

Falls ein oder zwei Erdseile vorhanden sind, erfolgt die Modifizierung der Potentialkoeffizienten analog zu den Impedanzen (Gl. (5.26)) unter Verwendung der dabei bereits berechneten mittleren Leiterabstände.

rechneten mittleren Leiterabstände.

### Mit- und Gegenadmittanz

Analog zu den Impedanzen gilt

$$\underline{Y}'_1 = \underline{Y}'_{nn} - \underline{Y}'_{nm}$$

und mit den Selbst- und Gegenadmittanzen aus Gl. (3.25)

$$\underline{Y}'_1 = (G'_E + 3G') + j\omega(C'_E + 3C') = G'_1 + jB'_1$$

Aus den Gln. (3.23) und (3.24) oder besser aus Gl. (3.14) mit den Symmetriebedingungen der Verdrillung folgt für die Kapazitäten des Mit- und Gegensystems<sup>5)</sup>

$$C'_1 = C'_2 = C'_E + 3C' = K'_{nn} - K'_{nm} = \frac{1}{P'_{nn} - P'_{nm}} = K'_1 = \frac{1}{P'_1}$$

und

$$C'_1 = C'_2 = 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{2h_n d_{nm}}{r_B d'_{nm}}} \approx 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{d_{nm}}{r_B}} \quad (5.41)$$

Wegen der Differenzbildung der Potentialkoeffizienten fällt der Anteil der Erdseile folgerichtig wieder heraus. Die Näherung gilt für  $2h \approx d'_{nm}$ .

### Nulladmittanz

Aus

$$\underline{Y}'_0 = \underline{Y}'_{nn} + 2\underline{Y}'_{nm} = G'_0 + j\omega C'_0 = G'_0 + jB'_0 \quad (5.42)$$

folgt mit (s. auch Gl. (3.24))

$$C'_0 = C'_E = K'_0 = K'_{nn} + 2K'_{nm} = \frac{1}{P'_0} = \frac{1}{P'_{nn} + 2P'_{nm}} \quad (5.43)$$

zunächst ohne Erdseile

$$C'_0 = 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{2h_n d_{nm}^2}{r_B d_{nm}^2}} \approx 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{8h_n^3}{r_B d_{nm}^2}} \quad (5.44)$$

<sup>5)</sup> Zur Berechnung der Symmetrischen Kapazitäten transformiert man zweckmäßigerweise bereits die Gln.(3.11), (3.14) und (3.15) in Symmetrische Koordinaten und erhält so sofort  $C'_1 = K'_1 = 1/P'_1$  und  $P'_1 = P'_{nn} - P'_{nm}$ .

Erdseile vergrößern die Nullkapazität. Anstelle  $P_{nn}$  und  $P_{nm}$  sind dann die modifizierten Potentialkoeffizienten  $P_{nn}^p$  bzw.  $P_{nn}^{pq}$  und  $P_{nm}^p$  bzw.  $P_{nm}^{pq}$ , deren Berechnung analog zu den Gln. (5.26) und (5.27) erfolgt, zu verwenden. Die Formel für die Nullkapazität ändert sich bei *einem* Erdseil in

$$C_0^p = \frac{1}{P_0 - 3 \frac{P_{np}^2}{P_{pp}}} \quad (5.45)$$

und bei *zwei* Erdseilen in

$$C_0^{pq} = \frac{1}{P_0 - 3 \frac{2P_{np}^2}{P_{pp} + P_{pq}}} \quad (5.46)$$

wenn  $P_0$  jeweils der Nullpotentialkoeffizient ohne Erdseile ist.

### 5.4.2 Doppelleitung\*

Einfache Beziehungen für die Kapazitäten der Doppelleitung in Symmetrischen Koordinaten lassen sich nur für

- verdrehte Doppelleitungen gleicher Belegung
- spiegelsymmetrische Leiteranordnung
- symmetrische Anordnung der Erdseile zu den Leiterseilen und
- Parallelschaltung der beiden Systeme

angeben. In allen anderen Fällen wird man die Kapazitäten ausgehend von der Matrix der Potentialkoeffizienten mit dem Computer berechnen (s. Abschnitt 4.3).

#### Mit- und Gegenkapazität

Nach Gl. (4.19) ergibt sich der gesamte Querstrom im Mitsystem der Doppelleitung unter den oben genannten Einschränkungen aus

$$\Delta I_1^{DL} = 2 \left[ (G_1^s - G_1^g) + j\omega (C_1^s - C_1^g) \right] U_1^{DL} = 2(G_1 + j\omega C_1) U_1^{DL}$$

Mit (s. Gl. (4.16))

$$C_1^s = K_1^s = \frac{P_1^s}{P_1^s P_1^s - P_1^g P_1^g}$$

$$C_1^g = -K_1^g = \frac{P_1^g}{P_1^s P_1^s - P_1^g P_1^g}$$

und analogen Beziehungen für die Wirkleitwerte. Damit wird für *ein* System der *parallelgeschalteten* Doppelleitung

$$C_1 = C_1^s - C_1^g = \frac{P_1^s - P_1^g}{P_1^s P_1^s - P_1^g P_1^g} = \frac{1}{P_1^s + P_1^g} = \frac{1}{P_{nn} - P_{nm} + P_{nN} - P_{nM}}$$

und mit Gl.(5.17) und (5.18) für die kilometrischen Werte

$$C_1 = 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{2h_n d_{nm} d'_{nN} d_{nM}}{r_B d'_{nm} d_{nN} d'_{nM}}} \approx 2\pi\epsilon_0 \frac{1}{\ln \frac{d_{nm} d_{nM}}{r_B d_{nN}}} \quad (5.47)$$

Die Näherung gilt für  $d'_{nm} = d'_{nN} = d'_{nM} \approx 2h_n$ .

Für die gesamte Doppelleitung gilt dann  $C_1^{DL} = C_2^{DL} = 2C_1$ .

Erdseile haben auf die Kapazitäten des Mit- und Gegensystems keinen Einfluß, so daß man diese gleich mit den nicht modifizierten Potentialkoeffizienten berechnen kann. Aus Gl. (5.47) ist ersichtlich, daß Bündelleiter (großes  $r_B$ ) die Betriebskapazität erhöhen, was sich günstig auf die Übertragungsverhältnisse bei großer Belastung auswirkt. Allerdings nehmen bei Höchstspannungsleitungen die erforderlichen Leiterabstände so zu, daß ihre Betriebskapazität wieder abnimmt (s. Tabelle 7.2).

### Nullkapazität

Analog zum Mit- und Gegensystem gilt

$$C_0^s = K_0^s = \frac{P_0^s}{P_0^s P_0^s - P_0^g P_0^g}$$

$$C_0^g = -K_0^g = \frac{P_0^g}{P_0^s P_0^s - P_0^g P_0^g}$$

Die Potentialkoeffizienten des Nullsystems setzen sich aber jetzt aus den modifizierten Potentialkoeffizienten des Originalsystems wie folgt zusammen

$$P_0^s = P_{nn}^{pq} + 2P_{nm}^{pq}$$

$$P_0^g = P_{nN}^{pq} + 2P_{nM}^{pq}$$

Für ein System der parallelgeschalteten Doppelleitung wird deshalb:

$$C_0 = C_0^s - C_0^g = \frac{1}{P_0^s + P_0^g} = \frac{1}{P_{nn}^{pq} + 2P_{nm}^{pq} + P_{nN}^{pq} + 2P_{nM}^{pq}} \quad (5.48)$$

und für die gesamte Doppelleitung gilt wieder  $C_0^{DL} = 2C_0$ .

Ohne die Ausdrücke für die modifizierten Potentialkoeffizienten hier anzugeben (sie sind analog zu den Ausdrücken für die modifizierten Impedanzen), ist ersichtlich, daß zum einen die Kapazität des Nullsystems *kleiner* als die des Mitsystems wird, und daß zum anderen die *Erdseile* die Kapazität des Nullsystems *vergrößern*. Zu den aus Gl. (5.48) berechneten Werten muß man in Abhängigkeit von der Nennspannung noch einen Zuschlag von 16...6 % (große Werte gelten für kleine Spannungen) für zusätzliche Erdkapazitäten machen.

## 6 Betriebsverhalten

Wir wollen i. f. das Betriebsverhalten der Freileitung anhand der in Kapitel 2 hergeleiteten  $\Pi$ -Ersatzschaltung mit konzentrierten Parametern beurteilen. Die Ableitungswiderstände sollen vernachlässigt werden. Für lange Leitungen ist es besser, eine der Ersatzschaltungen mit verteilten Parametern nach Bild 2.2 oder 2.3 heranzuziehen. Weiterhin soll zunächst nur der stationäre symmetrische Betrieb untersucht werden, wofür die Ersatzschaltung für das Mitsystem der Symmetrischen Komponenten maßgebend ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird der Index 1 an den Mitsystemgrößen weggelassen.

### 6.1 Spannungsabfall

Aus der  $\Pi$ -Ersatzschaltung, die in Bild 6.1 nochmals angegeben ist,

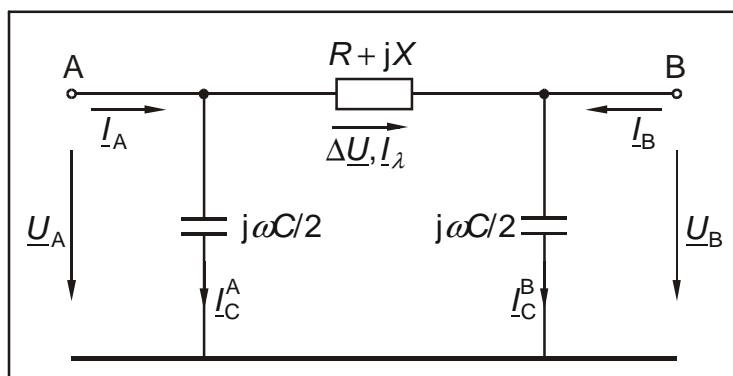


Bild 6.1:  $\Pi$ -Ersatzschaltung der Leitung mit konzentrierten Parametern

erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\Delta \underline{U} = \underline{U}_A - \underline{U}_B = (R + jX) \underline{I}_\lambda = \underline{Z} \underline{I}_\lambda \quad (6.1)$$

$$\underline{I}_C^A = j\omega \frac{C}{2} \underline{U}_A \quad \underline{I}_C^B = j\omega \frac{C}{2} \underline{U}_B \quad (6.2) \quad (6.3)$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_C^A + \underline{I}_\lambda \quad \underline{I}_B = \underline{I}_C^B - \underline{I}_\lambda \quad (6.4) \quad (6.5)$$

Mit diesen Gleichungen ergibt sich das Zeigerbild in Bild 6.2, beginnend mit der als gegeben angenommenen Spannung  $\underline{U}_B$ , deren Zeiger dann zweckmäßigerweise in die reelle Achse gelegt wird. Die weitere Konstruktionsreihenfolge geben die mit einem Kreis eingerahmten Schritte an.



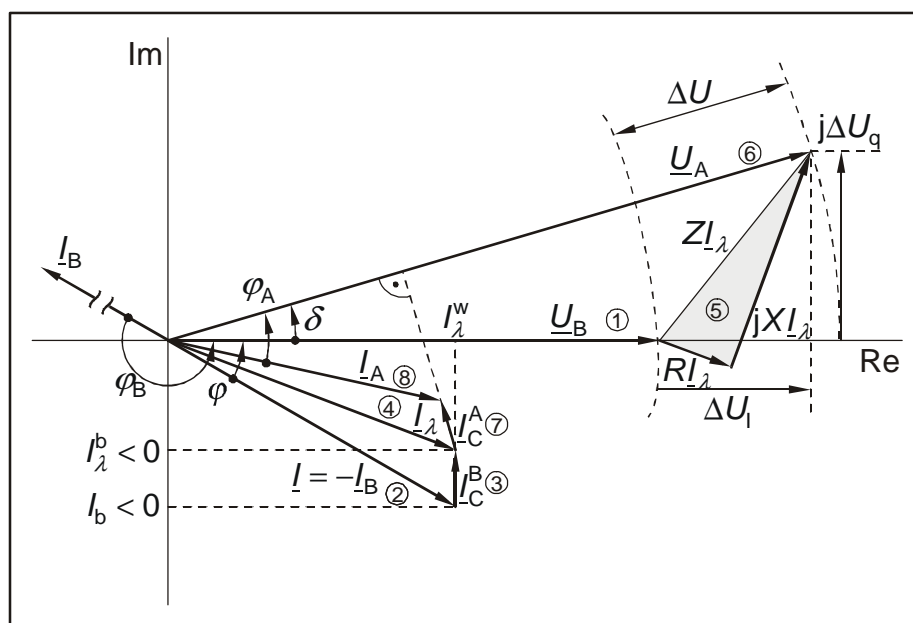


Bild 6.2: Zeigerbild der Leitung  
O Konstruktionsschritte

Um die Spannung am Anfang der Leitung zu berechnen, führen wir den *Längs- und Querspannungsabfall*  $\Delta U_l$  und  $\Delta U_q$  ein und zerlegen den Strom  $I_\lambda$  durch die Leitungsimpedanz in seinen Wirk- und Blindanteil. Aus Gl. (6.1) folgt dann mit  $\underline{U}_B = U_B \angle 0^\circ$  und  $\underline{I}_B = -I$

$$\underline{U}_A = \underline{U}_B + (R + jX)(I_\lambda^w + jI_\lambda^b) = \underline{U}_B + (R + jX)(I_\lambda^w + j(I_b + I_C^B)) = U_B + \Delta U_l + j\Delta U_q \quad (6.6)$$

mit  $\Delta U_l$  und  $\Delta U_q$  als Längs- und Querspannungsabfall

$$\Delta U_l = R I_\lambda^w - X I_\lambda^b = R I_w - X(I_b + I_C^B) \quad (6.7)$$

$$\Delta U_q = X I_\lambda^w + R I_\lambda^b = X I_w + R(I_b + I_C^B) \quad (6.8)$$

Dabei ist das Vorzeichen von  $I_\lambda^b$  bzw.  $I_b$  zu beachten. Der kapazitive Strom  $I_C^B$  am Ende der Leitung kompensiert einen induktiven Blindstrom des Abnehmers teilweise, wodurch bei  $X > R$  insbesondere der Längsspannungsabfall kleiner wird. Für den Betrag  $U_A$  ergibt sich aus Gl. (6.6)

$$U_A = \sqrt{(U_B + \Delta U_l)^2 + \Delta U_q^2} \quad (6.9)$$

und für die Spannungsdifferenz bzw. den *Spannungsabfall*

$$\Delta U = U_A - U_B = \sqrt{(U_B + \Delta U_l)^2 + \Delta U_q^2} - U_B \approx \Delta U_l \quad (6.10)$$

Die Näherung gilt für kleine *Übertragungswinkel*  $\delta$ . Dieser berechnet sich aus

$$\sin \delta = \frac{\Delta U_q}{U_A} \quad (6.11)$$

Im Hochspannungsnetz gilt wegen  $X > R$  außerdem näherungsweise

$$\Delta U_l = U_A - U_B = -X(I_b + I_C^B) = X(I \sin \varphi - I_C^B) \quad (6.12)$$

$$\Delta U_q = U_A \sin \delta = X I_w = X I \cos \varphi \quad (6.13)$$

d.h., der Spannungsabfall wird hauptsächlich vom Blindstrom verursacht, während der Wirkstrom den Übertragungswinkel bestimmt. Kleines  $X$  und großes  $C$  ( $I_C^B$ ) wirken sich günstig auf das Übertragungsverhalten aus. Durch Reihenkompensation läßt sich die wirk-same Reaktanz verringern, wodurch im Mittelspannungsnetz die Spannungsverhältnisse (Verringerung von  $\Delta U$ ) und im Hochspannungsnetz die Stabilitätsverhältnisse (Verringerung von  $\delta$ ) verbessert werden sollen (Bild 6.3a und 6.3b).

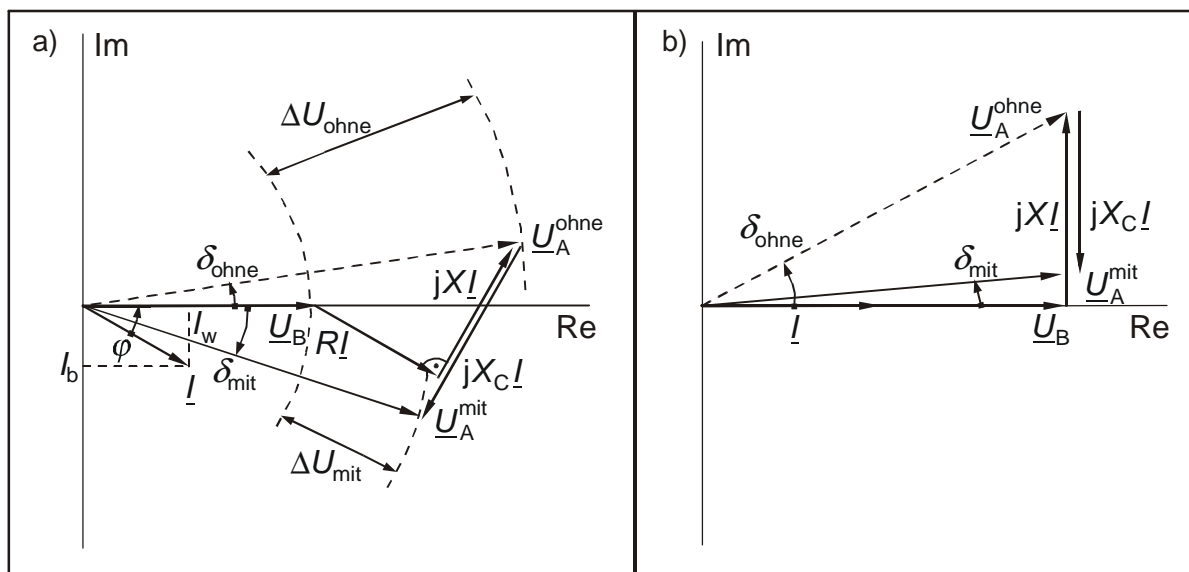


Bild 6.3: Wirkung der Reihenkompensation  
 a) im Mittelspannungsnetz:  $\Delta U$  groß,  $\varphi$  groß,  $R \approx X$ , b) im Hochspannungsnetz:  $\delta$  groß,  $\varphi$  klein,  $X \gg R$

Der erforderliche Kompensationsgrad

$$k = \frac{X_C}{X} \quad (6.14)$$

( $X_C$  kapazitive Reaktanz der Reihenkapazitoren,  $X$  Leitungsreaktanz) liegt aufgrund der unterschiedlichen  $\cos \varphi$  der Belastung und der  $R$  zu  $X$  Verhältnisse im Mittelspannungsnetz bei 2...4 (Überkompensation) und im Hochspannungsnetz maximal bei 1. Die vorstehenden Gleichungen gelten bei Reihenkompensation weiterhin mit

$$X(1 - k) \text{ anstelle } X$$

Zur Abschätzung des Einflusses des  $\cos \varphi$ , der Leitungsparameter und Leitungslänge auf den Spannungsabfall und die übertragbare Leistung kann folgende einfache Beziehung dienen. Aus Gl. (6.10) folgt mit Gl. (6.7) für den Strom am Ende B der Leitung

$$I = \frac{\Delta U + \frac{1}{2} \omega C' X' l^2 U_B}{(R' \cos \varphi + X' \sin \varphi) l} \quad (6.15)$$

und für die abgenommene Leistung  $S = 3U_B I$  bei  $U_B = U_n / \sqrt{3}$

$$S = \frac{U_n^2 \Delta u}{(R' \cos \varphi + X' \sin \varphi) l} + \frac{1}{2} \frac{\omega C' X' U_n^2}{R' \cos \varphi + X' \sin \varphi} l \quad (6.16)$$

Im Bereich kurzer Leitungslängen ist der 1. Term der Gl. (6.16) dominierend. Bei gegebenen Spannungsabfall ( $\Delta u$  ist auf  $U_n / \sqrt{3}$  bezogen) nimmt die übertragbare Leistung hyperbolisch mit der Länge ab. Eine Verschlechterung des  $\cos \varphi$  wirkt sich ebenfalls leistungsmindernd aus. Der 2. Term der Gl. (6.16) drückt den *Selbstkompensationseffekt* durch die halbe Leitungskapazität der  $\Pi$ -Ersatzschaltung am Abnahmeende B aus. Er erhöht mit wachsender Länge die übertragbare Leistung bei gleichem Spannungsabfall. Für  $S=0$  (Leerlauf an B) bestimmt er den dann negativen Spannungsabfall (FERRANTI-Effekt) (s. Abschnitt 6.3). Für genaue Berechnungen ist Gl. (6.16) jedoch aufgrund der Näherung  $\Delta u = \Delta u_l$  zu ungenau. In Bild 6.4 sind die für eine 380-kV-Leitung mit Hilfe der ausführlichen Leitungsgleichungen (Gln. (2.15) und (2.16)) berechneten Übertragungsverhältnisse dargestellt. Die prinzipiellen an Gl. (6.16) diskutierten Abhängigkeiten  $S \sim 1/l$  bei konstantem  $\Delta u$  und  $S \sim l$  bei  $\Delta u = 0$  werden aber deutlich.

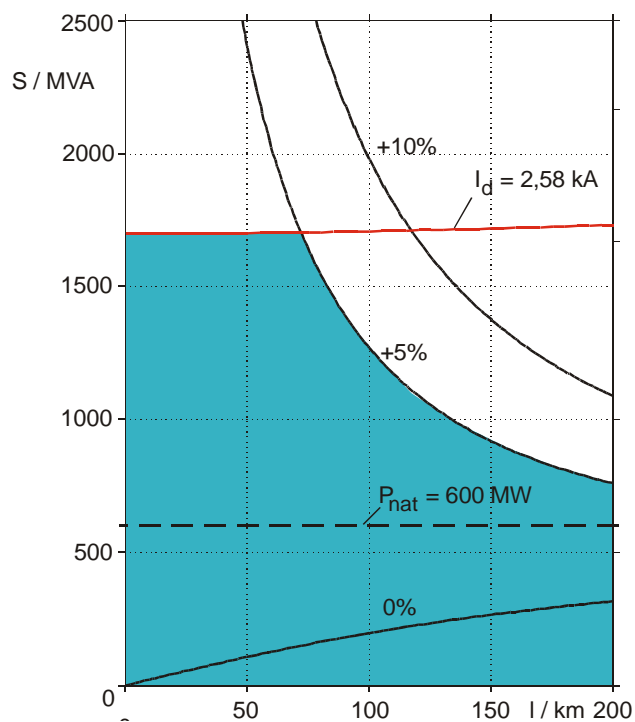


Bild 6.4: Übertragungsverhältnisse einer 400-kV-Einfachleitung mit  $R'_l = 0,036 \Omega/\text{km}$ ,  $L'_l = 0,806 \text{ mH}/\text{km}$  und  $C'_l = 13,9 \mu\text{F}/\text{km}$

## 6.2 Verluste, Blindstrombedarf, natürliche Leistung

Die Verluste und der Blindleistungsbedarf der Freileitung setzen sich aus je einem spannungsabhängigen und einem stromabhängigen Anteil zusammen.

$$P_V = 3G \frac{1}{2} (U_A^2 + U_B^2) + 3R_l I_\lambda^2 \quad (6.17)$$

$$Q_V = -3\omega C \frac{1}{2} (U_A^2 + U_B^2) + 3XI_\lambda^2 \quad (6.18)$$

Die spannungsabhängigen Anteile lassen sich bei Betrieb der Leitung mit Nennspannung ( $U_A \approx U_B \approx U_n / \sqrt{3}$ ) näherungsweise ausdrücken durch  $GU_n^2$  bzw.  $-\omega CU_n^2$ , womit die Gl. (6.17) und (6.18) übergehen in

$$P_V = GU_n^2 + 3RI_\lambda^2 \quad (6.19)$$

$$Q_V = -\omega CU_n^2 + 3XI_\lambda^2 \quad (6.20)$$

Aus Gl. (6.20) ist ersichtlich, daß der Blindleistungsbedarf der Leitung bei Nennspannung bei einem bestimmten Strom  $I_\lambda$  verschwindet. Dieser Strom heißt *natürlicher Strom*. Er berechnet sich aus Gl. (6.20) bei  $Q_V = 0$  zu

$$I_{\text{nat}} = \frac{U_n}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{U_n}{\sqrt{3}} \frac{1}{Z_w} \quad (6.21)$$

$Z_w$  ist der *Wellenwiderstand* der verlustlosen Leitung. Er ist reell.

$$Z_w = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (6.22)$$

$Z_w$  hängt bei Vernachlässigung der inneren Reaktanz nur von der Geometrie der Leitung ab. Für die Einfachleitung gilt z. B.

$$Z_w = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \ln \frac{d_{\text{nm}}}{r_B} \quad (6.23)$$

Durch Multiplizieren von  $I_{\text{nat}}$  mit  $\sqrt{3}U_n$  entsteht die *natürliche Leistung*

$$P_{\text{nat}} = \sqrt{3}U_n I_{\text{nat}} = \frac{U_n^2}{Z_w} \quad (6.24)$$

Die Größenordnung der natürlichen Leistung in Abhängigkeit von der Nennspannung ist in Tabelle 7.2 im Anhang angegeben. Für Fernübertragungen wird der sogenannte natürliche Betrieb, d.h. die Übertragung der natürlichen Leistung angestrebt.  $P_{\text{nat}}$  wird groß, wenn  $U_n$  groß und  $Z_w$  klein werden. Bündelleiter verringern den Wellenwiderstand, wirken sich also günstig auf das Übertragungsverhalten aus. Die natürliche Leistung der 110-, 220- und 380-kV-Leitungen verhalten sich wie 1:5:20. Das Bild 6.5 zeigt die Übertragungsverhältnisse einer Hochspannungsleitung bei Betrieb mit der natürlichen Leistung unter Vernachlässigung der Wirkwiderstände.

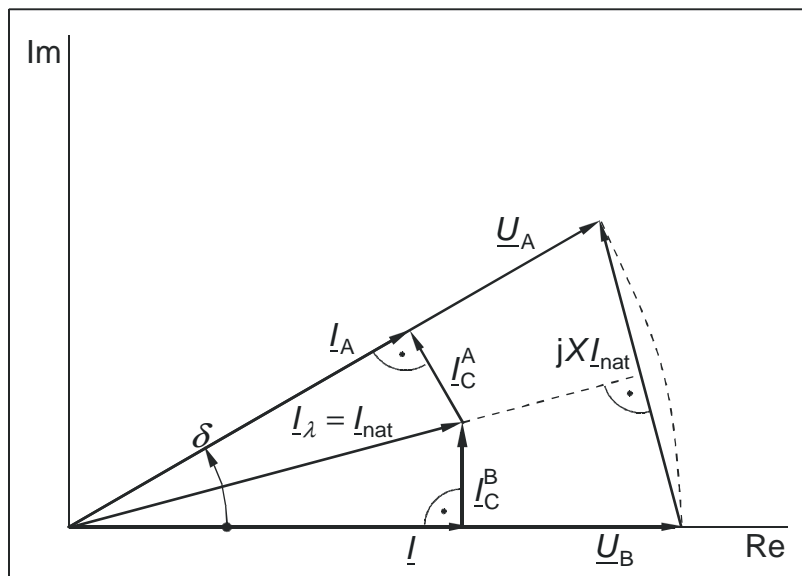


Bild 6.5: Zeigerbild für den natürlichen Betrieb ( $R = 0$ )

Die Ströme und Spannungen an den Leitungsenden A und B liegen jeweils in Phase. Der Spannungsfall  $\Delta U = U_A - U_B$  wird Null. Für  $U_A = U_B = U_n / \sqrt{3}$  wird die natürliche Leistung verlustlos übertragen. Aus Gl. (6.24) folgt, daß sich der natürliche Betrieb einstellt, wenn die Leitung mit dem reellen Wellenwiderstand  $Z_w = \sqrt{L/C}$  abgeschlossen wird.

### 6.3 Leerlauf und Kurzschluß

Im *Leerlauf* ist  $I = I_B = 0$  und es wird  $I_\lambda = I_C^B$ . Aus dem Zeigerbild in Bild 6.6 ist ersichtlich, daß die Spannung am Ende der Leitung größer als am Anfang wird. Diese Erscheinung heißt *FERRANTI-Effekt*<sup>6)</sup>.

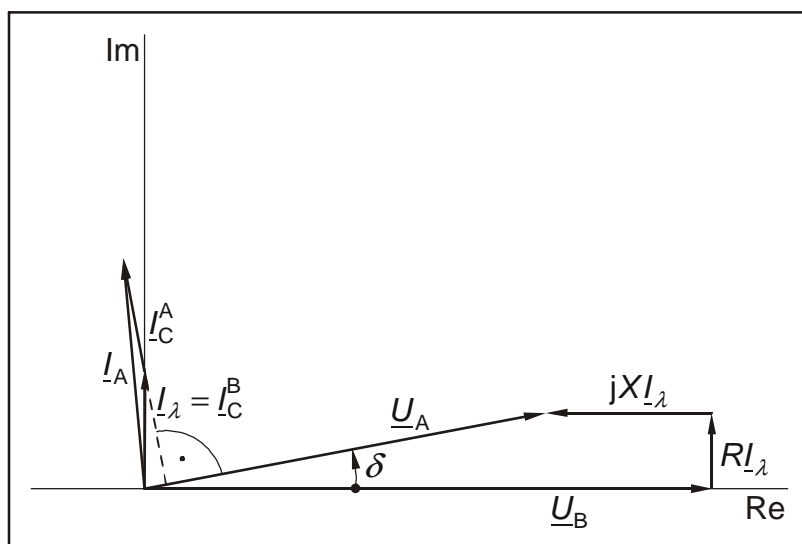


Bild 6.6: Zeigerbild der an B leerlaufenden Leitung

Der *Leerlauf-* oder *Ladestrom* am Anfang ergibt sich aus

$$I_A = I_C = I_C^A + I_C^B = j\omega \frac{C}{2} (U_A + U_B)$$

<sup>6)</sup> nach dem Engländer Ferranti (1864 - 1930)

und für  $U_A \approx U_B \approx U_n / \sqrt{3}$

$$I_C = \frac{1}{\sqrt{3}} \omega C U_n \quad (6.25)$$

Nach Multiplikation mit  $\sqrt{3}U_n$  ergibt sich die *Ladeleistung*

$$Q_C = \sqrt{3}U_n I_C = \omega C U_n^2 \quad (6.26)$$

Ladestrom und Ladeleistung sind in der Praxis übliche Angaben, aus denen man die Leitungskapazität erhält. Richtwerte gibt die Tabelle 7.2 im Anhang.

Bei *Kurzschluß* am Leitungsende B wird  $\underline{U}_B = 0$ . Das entsprechende Zeigerbild, bei dem die Zeiger  $R\underline{I}_{-\lambda}$  und  $jX\underline{I}_{-\lambda}$  auf einem THALES-Kreis liegen, zeigt Bild 6.7

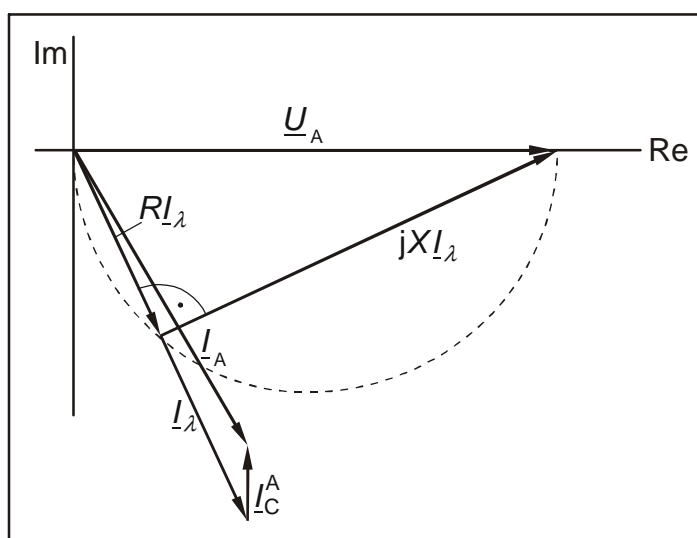


Bild 6.7: Zeigerbild der an B kurzgeschlossenen Leitung

## 6.4 Kapazitiver Erdschlußstrom

Eine weitere wichtige Kenngröße von Leitungen ist der *kapazitive Erdschlußstrom*  $I_{CE}$ . Er gibt dem Praktiker Auskunft über die Leiter-Erde- oder Nullkapazität der Leitung. Zur Berechnung von  $I_{CE}$  denken wir uns die Leitung von einem starren Netz mit der Nennspannung  $U_n$  gespeist, wobei der Sternpunkt des speisenden Netzes nicht geerdet ist und verbinden den Leiter a mit Erde. Die Längsglieder und die Kapazitäten zwischen den Leitern können wir dabei vernachlässigen, so daß die einfache Schaltung in Bild 6.8 entsteht.

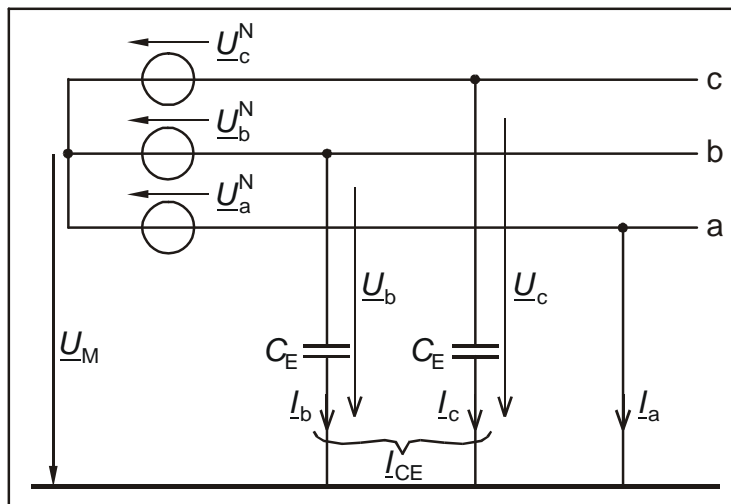


Bild 6.8: Ersatzanordnung zur Berechnung des kapazitiven Erdschlußstromes der Freileitung

Wir lesen ab :

$$\underline{U}_M = -\underline{U}_a^N \quad I_a = -I_b - I_c = -I_{CE}$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_b^N + \underline{U}_M \quad I_b = j\omega C_E \underline{U}_b$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_c^N + \underline{U}_M \quad I_c = j\omega C_E \underline{U}_c$$

Also wird

$$I_{CE} = j\omega C_E (\underline{U}_b + \underline{U}_c) = j\omega C_E (\underline{a}^2 + \underline{a} - 2) \underline{U}_a^N = -j3\omega C_E \underline{U}_a^N$$

und mit  $\underline{U}_a^N = \frac{1}{\sqrt{3}} U_n$

$$I_{CE} = \sqrt{3}\omega C_E U_n$$

(6.27)

Das Zeigerbild in Bild 6.9 illustriert die Verhältnisse.

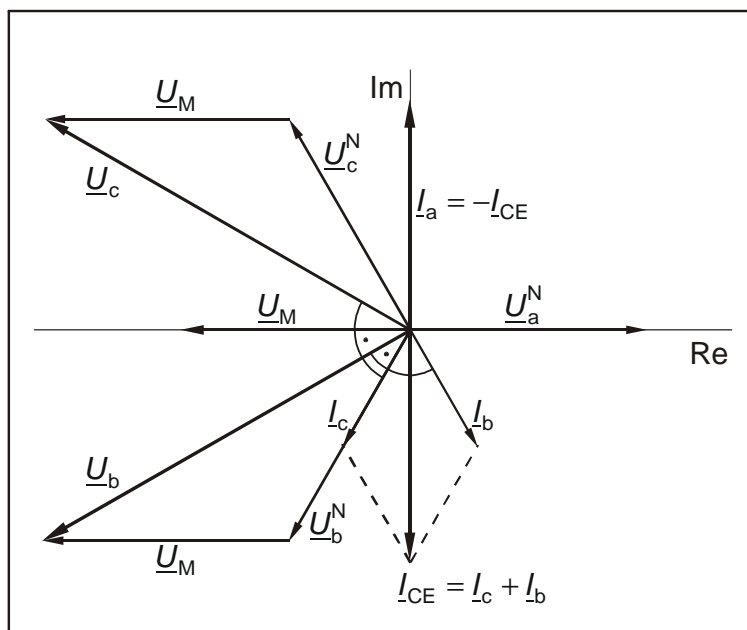


Bild 6.9: Zeigerbild für Erdschluß im Leiter a

Zum gleichen Ergebnis kommt man natürlich auch über die Symmetrischen Komponenten. Aus der für den einpoligen Kurzschluß typischen Hintereinanderschaltung der Komponentennetze (Bild 6.10) folgt unter Vernachlässigung der Längsimpedanzen:

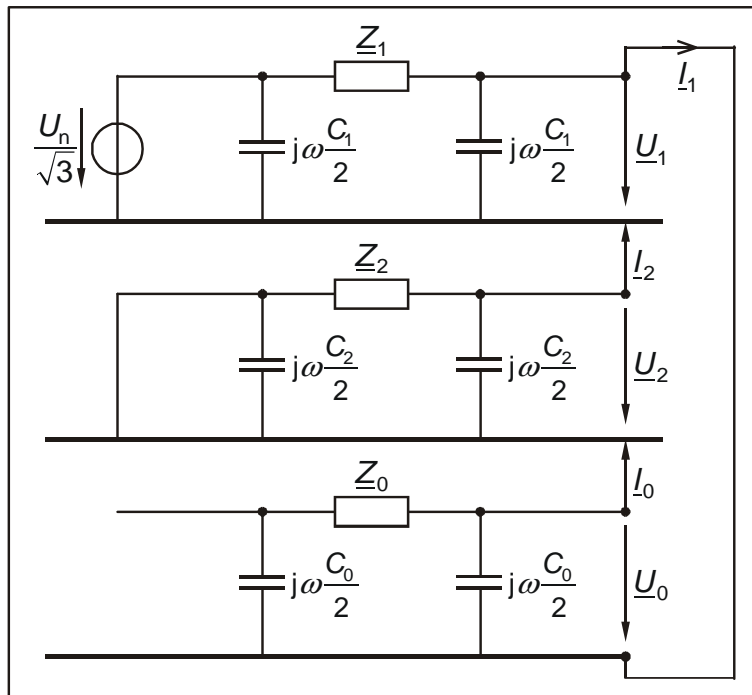


Bild 6.10: Komponentenersatzschaltbilder bei Erdschluß der Leitung im Leiter a

$$I_1 = I_2 = I_0 = j\omega C_0 \frac{U_n}{\sqrt{3}}$$

und nach der Rücktransformation mit  $I_1 = I_2 = I_0$ :

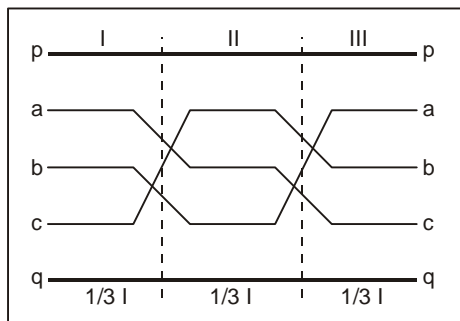
$$I_a = I_1 + I_2 + I_0 = 3I_1 = j\sqrt{3}\omega C_E U_n = -I_{CE}$$



## 7 Anhang

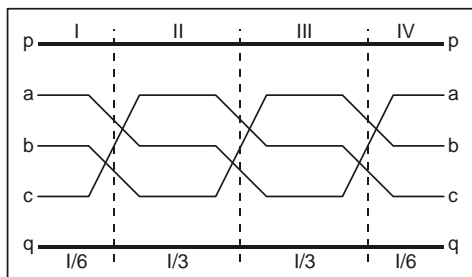
### 7.1 Verdrillungsschemata

#### 7.1.1 Verdrillung $\alpha_1$



	I	II	III	mittlere Impedanz
$\underline{Z}_{aa}$ $\underline{Z}_{bb}$ $\underline{Z}_{cc}$	a-a b-b c-c	b-b c-c a-a	c-c a-a b-b	$\underline{Z}_{nn} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{bb} + \underline{Z}_{cc})$
$\underline{Z}_{ab}$ $\underline{Z}_{bc}$ $\underline{Z}_{ca}$	a-b b-c c-a	b-c c-a a-b	c-a a-b b-c	$\underline{Z}_{nm} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca})$
$\underline{Z}_{ap}$ $\underline{Z}_{bp}$ $\underline{Z}_{cp}$	a-p b-p c-p	b-p c-p a-p	c-p a-p b-p	$\underline{Z}_{np} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{ap} + \underline{Z}_{bp} + \underline{Z}_{cp})$
$\underline{Z}_{aq}$ $\underline{Z}_{bq}$ $\underline{Z}_{cq}$	a-q b-q c-q	b-q c-q a-q	c-q a-q b-q	$\underline{Z}_{nq} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{aq} + \underline{Z}_{bq} + \underline{Z}_{cq})$ 7)

#### 7.1.2 Verdrillung $\alpha_2$

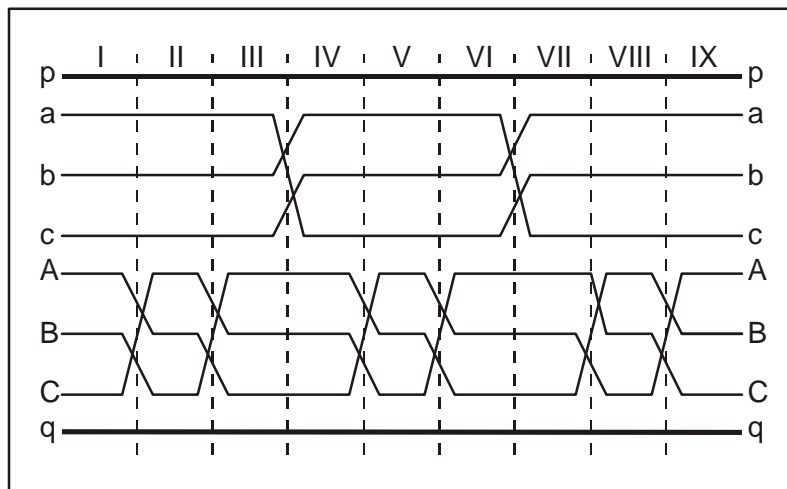


	I	II	III	IV	mittlere Impedanz
$\underline{Z}_{aa}$ $\underline{Z}_{bb}$ $\underline{Z}_{cc}$	a-a b-b c-c	b-b c-c a-a	c-c a-a b-b	a-a b-b c-c	$\underline{Z}_{nn} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{bb} + \underline{Z}_{cc})$
$\underline{Z}_{ab}$ $\underline{Z}_{bc}$ $\underline{Z}_{ca}$	a-b b-c c-a	b-c c-a a-b	c-a a-b b-c	a-b b-c c-a	$\underline{Z}_{nm} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca})$
$\underline{Z}_{ap}$ $\underline{Z}_{bp}$ $\underline{Z}_{cp}$	a-p b-p c-p	b-p c-p a-p	c-p a-p b-p	a-p b-p c-p	$\underline{Z}_{np} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{ap} + \underline{Z}_{bp} + \underline{Z}_{cp})$
$\underline{Z}_{aq}$ $\underline{Z}_{bq}$ $\underline{Z}_{cq}$	a-q b-q c-q	b-q c-q a-q	c-q a-q b-q	a-q b-q c-q	$\underline{Z}_{nq} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{aq} + \underline{Z}_{bq} + \underline{Z}_{cq})$ 8)

7) Bei symmetrischer Anordnung der Erdseile zu den Leiterseilen ist  $\underline{Z}_{nq} = \underline{Z}_{np}$ .

8) Bei symmetrischer Anordnung der Erdseile zu den Leiterseilen wird  $\underline{Z}_{nq} = \underline{Z}_{np}$  und  $\underline{Z}_{qq} = \underline{Z}_{pp}$ .

### 7.1.3 Verdrillung $\beta$



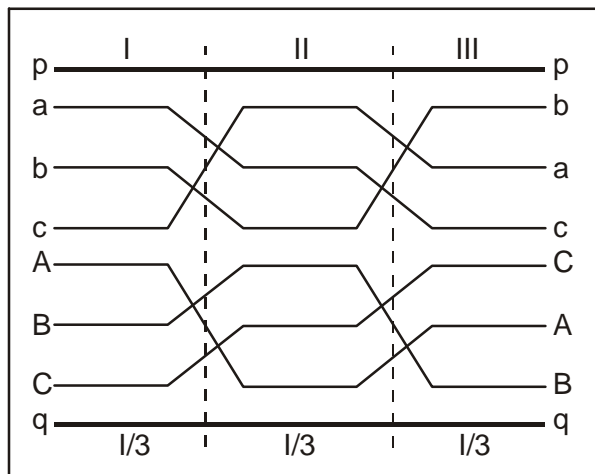
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	mittlere Impedanz
$\underline{Z}_{nn}$	$\underline{Z}_{aa}$ $\underline{Z}_{bb}$ $\underline{Z}_{cc}$	a-a b-b c-c	a-a b-b c-c	a-a b-b c-c	b-b c-c a-a	b-b c-c a-a	b-b c-c a-a	c-c a-a b-b	c-c a-a b-b	c-c a-a b-b	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{aa} + \underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ac})$
$\underline{Z}_{nm}$	$\underline{Z}_{ab}$ $\underline{Z}_{bc}$ $\underline{Z}_{ca}$	a-b b-c c-a	a-b b-c c-a	a-b b-c c-a	b-c c-a a-b	b-c c-a a-b	b-c c-a a-b	c-a a-b b-c	c-a a-b b-c	c-a a-b b-c	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca})$
$\underline{Z}_{nN}$	$\underline{Z}_{aA}$ $\underline{Z}_{bB}$ $\underline{Z}_{cC}$	a-A b-B c-C	a-B b-C c-A	a-C b-A c-B	b-C c-A a-B	b-A c-B a-C	b-B c-C a-A	c-B a-C b-A	c-C a-A b-B	c-A a-B b-C	$\frac{1}{9}(\underline{Z}_{aA} + \underline{Z}_{aB} + \underline{Z}_{aC} + \underline{Z}_{bB} + \underline{Z}_{bC} + \underline{Z}_{bA} + \underline{Z}_{cC} + \underline{Z}_{cA} + \underline{Z}_{cB})$
$\underline{Z}_{nM}$	$\underline{Z}_{aB}$ $\underline{Z}_{bC}$ $\underline{Z}_{cA}$	a-B b-C c-A	a-C b-A c-B	a-A b-B c-C	b-A c-B a-C	b-B c-C a-A	b-C c-A a-B	c-C a-A b-B	c-A a-B b-C	c-B a-C b-A	$\frac{1}{9}(\underline{Z}_{aB} + \underline{Z}_{aC} + \underline{Z}_{aA} + \underline{Z}_{bC} + \underline{Z}_{bA} + \underline{Z}_{bB} + \underline{Z}_{cA} + \underline{Z}_{cB} + \underline{Z}_{cC})$
$\underline{Z}_{mN}$	$\underline{Z}_{bA}$ $\underline{Z}_{cB}$ $\underline{Z}_{aC}$	b-A c-B a-C	b-B c-C a-A	b-C c-A a-B	c-C a-A b-B	c-A a-B b-C	c-B a-C b-A	a-B b-C c-A	a-C b-A c-B	a-A b-B c-C	$\frac{1}{9}(\underline{Z}_{bA} + \underline{Z}_{cA} + \underline{Z}_{aA} + \underline{Z}_{cB} + \underline{Z}_{aB} + \underline{Z}_{bB} + \underline{Z}_{cA} + \underline{Z}_{bC} + \underline{Z}_{cC})$
$\underline{Z}_{NN}$	$\underline{Z}_{Ab}$ $\underline{Z}_{Bc}$ $\underline{Z}_{Ca}$	A-A B-B C-C	B-B C-C A-A	C-C A-A B-B	C-C A-A B-B	A-A B-B C-C	B-B C-C A-A	B-B C-C A-A	C-C A-A B-B	A-A B-B C-C	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{AA} + \underline{Z}_{BB} + \underline{Z}_{CC})$
$\underline{Z}_{NM}$	$\underline{Z}_{AB}$ $\underline{Z}_{BC}$ $\underline{Z}_{CA}$	A-B B-C C-A	B-C C-A A-B	C-A A-B B-C	C-A A-B B-C	A-B B-C C-A	B-C C-A A-B	B-C C-A A-B	C-A A-B B-C	A-B B-C C-A	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{AB} + \underline{Z}_{BC} + \underline{Z}_{CA})$

Weiter gilt :

$$\underline{Z}_{np} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{ap} + \underline{Z}_{bp} + \underline{Z}_{cp}) \quad \underline{Z}_{Np} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{Ap} + \underline{Z}_{Bp} + \underline{Z}_{Cp})$$

$$\underline{Z}_{nq} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{aq} + \underline{Z}_{bq} + \underline{Z}_{cq}) \quad \underline{Z}_{Nq} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_{Aq} + \underline{Z}_{Bq} + \underline{Z}_{Cq})$$

7.1.4 Verdrillung  $\gamma$



		I	II	III	mittlere Impedanz	Bem.
$\underline{Z}_{nN}$	$\underline{Z}_{aA}$	a-A	c-C	b-B	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{aA} + \underline{Z}_{bB} + \underline{Z}_{cC})$	
	$\underline{Z}_{bB}$	b-B	a-A	c-C		
	$\underline{Z}_{cC}$	c-C	b-B	a-A		
$\underline{Z}_{nM}$	$\underline{Z}_{aB}$	a-B	c-A	b-C	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{aB} + \underline{Z}_{bC} + \underline{Z}_{cA})$	werden gleich bei spiegelsymmetrischer Leiteranordnung
	$\underline{Z}_{bC}$	b-C	a-B	c-A		
	$\underline{Z}_{cA}$	c-A	b-C	a-B		
$\underline{Z}_{mN}$	$\underline{Z}_{bA}$	b-A	a-C	c-B	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{bA} + \underline{Z}_{cB} + \underline{Z}_{aC})$	
	$\underline{Z}_{cB}$	c-B	b-A	a-C		
	$\underline{Z}_{aC}$	a-C	c-B	b-A		
$\underline{Z}_{np}$	$\underline{Z}_{ap}$	a-p	c-p	b-p	$\frac{1}{3}(\underline{Z}_{ap} + \underline{Z}_{bp} + \underline{Z}_{cp})$ <sup>9)</sup>	$\underline{Z}_{nq}$ analog
	$\underline{Z}_{bp}$	b-p	a-p	c-p		
	$\underline{Z}_{cp}$	c-p	b-p	a-p		

Bemerkungen :

$\underline{Z}_{nM} \neq \underline{Z}_{nN}$  (im Gegensatz zur Verdrillung  $\beta$ )

$\underline{Z}_{nM} = \underline{Z}_{mN}$  bei spiegelsymmetrischer Leiteranordnung

Verdrillung  $\gamma_2$  liefert die gleichen mittleren Impedanzen

<sup>9)</sup> Bei symmetrischer Anordnung der Erdseile zu den Leiterseilen ist  $\underline{Z}_{nq} = \underline{Z}_{np}$ .

## 7.2 Modifizierung der Parameter der verdrehten Doppelleitung\*

Ausgehend von der nach Leitergrößen und Erdseilgrößen partitionierten Impedanzmatrix wird

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_I \\ \Delta \underline{u}_{II} \\ \Delta \underline{u}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{II} & \underline{Z}_{IE} & \underline{Z}_{IE} \\ \underline{Z}_{II} & \underline{Z}_{II} & \underline{Z}_{II} \\ \underline{Z}_{EI} & \underline{Z}_{EI} & \underline{Z}_{EE} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_I \\ \underline{i}_{II} \\ \underline{i}_E \end{bmatrix}$$

$$\underline{i}_E = -\underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} \underline{i}_I - \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} \underline{i}_{II}$$

eingesetzt in die Ausgangsgleichung

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_I \\ \Delta \underline{u}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{II} - \underline{Z}_{IE} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} & \underline{Z}_{II} - \underline{Z}_{IE} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} \\ \underline{Z}_{II} - \underline{Z}_{II} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} & \underline{Z}_{II} - \underline{Z}_{II} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_I \\ \underline{i}_{II} \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{u}_I \\ \Delta \underline{u}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{II} - \Delta \underline{Z}_{II} & \underline{Z}_{II} - \Delta \underline{Z}_{II} \\ \underline{Z}_{II} - \Delta \underline{Z}_{II} & \underline{Z}_{II} - \Delta \underline{Z}_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_I \\ \underline{i}_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{II}^E & \underline{Z}_{II}^E \\ \underline{Z}_{II}^E & \underline{Z}_{II}^E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i}_I \\ \underline{i}_{II} \end{bmatrix}$$

Die einzelnen Untermatrizen werden für die verdrehte Doppelleitung mit spiegelsymmetrischer Leiteranordnung und zwei gleichen symmetrisch zu den Leiterseilen angeordneten Erdseilen  $p$  und  $q$  (Impedanzmatrix nach Gl. (4.2) mit  $\underline{Z}_{NN} = \underline{Z}_{nn}$ ,  $\underline{Z}_{NM} = \underline{Z}_{nM}$  und  $\underline{Z}_{qq} = \underline{Z}_{pp}$ )

$$\underline{Z}_{IE} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} = \underline{Z}_{II} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} = \Delta \underline{Z}_{II} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mit

$$\Delta \underline{Z}_{II} = \frac{(\underline{Z}_{np}^2 + \underline{Z}_{nq}^2) \underline{Z}_{pp} - 2 \underline{Z}_{pq} \underline{Z}_{np} \underline{Z}_{nq}}{\underline{Z}_{pp}^2 - \underline{Z}_{pq}^2} = \Delta \underline{Z}_{II}$$

$$\underline{Z}_{II} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} = \underline{Z}_{II} \underline{Z}_{EE}^{-1} \underline{Z}_{EI} = \Delta \underline{Z}_{II} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mit

$$\Delta \underline{Z}_{II} = \frac{2 \underline{Z}_{np} \underline{Z}_{nq} \underline{Z}_{pp} - (\underline{Z}_{np}^2 + \underline{Z}_{nq}^2) \underline{Z}_{pq}}{\underline{Z}_{pp}^2 - \underline{Z}_{pq}^2} = \Delta \underline{Z}_{II}$$

Die Transformation in Symmetrische Koordinaten (1,2,0) ergibt:

$$\begin{bmatrix} \Delta \underline{U}_1^I \\ \Delta \underline{U}_2^I \\ \Delta \underline{U}_0^I \\ \Delta \underline{U}_1^{II} \\ \Delta \underline{U}_2^{II} \\ \Delta \underline{U}_0^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1^I & 0 & 0 & \underline{Z}_1^{II} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2^I & 0 & 0 & \underline{Z}_2^{II} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0^I & 0 & 0 & \underline{Z}_0^{II} \\ \underline{Z}_1^{III} & 0 & 0 & \underline{Z}_1^{III} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_2^{III} & 0 & 0 & \underline{Z}_2^{III} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0^{III} & 0 & 0 & \underline{Z}_0^{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1^I \\ \underline{I}_2^I \\ \underline{I}_0^I \\ \underline{I}_1^{II} \\ \underline{I}_2^{II} \\ \underline{I}_0^{II} \end{bmatrix}$$

mit

$$\underline{Z}_1^I = \underline{Z}_1^{III} = \underline{Z}_{nn} - \Delta \underline{Z}_{I1} - (\underline{Z}_{nm} - \Delta \underline{Z}_{I1}) = \underline{Z}_{nn} - \underline{Z}_{nm}$$

$$\underline{Z}_1^{II} = \underline{Z}_1^{III} = \underline{Z}_{nN} - \Delta \underline{Z}_{I1} - (\underline{Z}_{nM} - \Delta \underline{Z}_{I1}) = \underline{Z}_{nN} - \underline{Z}_{nM}$$

$$\underline{Z}_0^I = \underline{Z}_0^{III} = \underline{Z}_{nn} - \Delta \underline{Z}_{I1} + 2(\underline{Z}_{nm} - \Delta \underline{Z}_{I1}) = \underline{Z}_{nn} + 2\underline{Z}_{nm} - 3\Delta \underline{Z}_{I1}$$

$$\underline{Z}_0^{II} = \underline{Z}_0^{III} = \underline{Z}_{nN} - \Delta \underline{Z}_{I1} + 2(\underline{Z}_{nM} - \Delta \underline{Z}_{I1}) = \underline{Z}_{nN} + 2\underline{Z}_{nM} - 3\Delta \underline{Z}_{I1}$$

$$\underline{Z}_1^I + \underline{Z}_1^{II} = \underline{Z}_1^{III} + \underline{Z}_1^{III} = \underline{Z}_{nn} - \underline{Z}_{nm} + \underline{Z}_{nN} - \underline{Z}_{nM}$$

$$\underline{Z}_0^I + \underline{Z}_0^{II} = \underline{Z}_0^{III} + \underline{Z}_0^{III} = \underline{Z}_{nn} + 2\underline{Z}_{nm} + \underline{Z}_{nN} + 2\underline{Z}_{nM} - 3(\Delta \underline{Z}_{I1} + \Delta \underline{Z}_{I1})$$

dabei ist

$$\begin{aligned} 3(\Delta \underline{Z}_{I1} + \Delta \underline{Z}_{I1}) &= \frac{(\underline{Z}_{np}^2 + 2\underline{Z}_{np}\underline{Z}_{nq} + \underline{Z}_{nq}^2)\underline{Z}_{pp} - (\underline{Z}_{np}^2 + 2\underline{Z}_{np}\underline{Z}_{nq} + \underline{Z}_{nq}^2)\underline{Z}_{pq}}{\underline{Z}_{pp} - \underline{Z}_{pq}} \\ &= \frac{(\underline{Z}_{np} + \underline{Z}_{nq})^2(\underline{Z}_{pp} - \underline{Z}_{pq})}{(\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq})(\underline{Z}_{pp} - \underline{Z}_{pq})} = \frac{(\underline{Z}_{np} + \underline{Z}_{nq})^2}{(\underline{Z}_{pp} + \underline{Z}_{pq})} \end{aligned}$$

und

$$\underline{Z}_{np} + \underline{Z}_{nq} = 2R_E' + j\omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \ln \frac{\delta}{d_{np}} + \ln \frac{\delta}{d_{nq}} \right) = 2 \left( R_E' + j\omega_0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\delta}{\sqrt{d_{np}d_{nq}}} \right) = 2\underline{Z}_{npq}$$

### 7.3 CARSONSche Reihen\*

$$P = \frac{\pi}{8} - b_1 x \cos \vartheta + b_2 [(c_2 - \ln x)x^2 \cos 2\vartheta + x^2 \vartheta \sin 2\vartheta] + b_3 x^3 \cos 3\vartheta - d_4 x^4 \cos 4\vartheta \\ - b_5 x^5 \cos 5\vartheta + b_6 [(c_6 - \ln x)x^6 \cos 6\vartheta + x^6 \vartheta \sin 6\vartheta] + b_7 x^7 \cos 7\vartheta - d_8 x^8 \cos 8\vartheta \\ - \dots$$

$$Q = \frac{1}{2}(k - \ln x) + b_1 x \cos \vartheta - d_2 x^2 \cos 2\vartheta + b_3 x^3 \cos 3\vartheta - b_4 [(c_4 - \ln x)x^4 \cos 4\vartheta + x^4 \vartheta \sin 4\vartheta] \\ + b_5 x^5 \cos 5\vartheta - d_6 x^6 \cos 6\vartheta + b_7 x^7 \cos 7\vartheta - b_8 [(c_8 - \ln x)x^8 \cos 8\vartheta + x^8 \vartheta \sin 8\vartheta] \text{ mit} \\ + \dots$$

$$x = 2h_i \sqrt{\mu \kappa \omega} \quad \text{und } \vartheta = 0$$

für die Selbstimpedanz und

$$x = d_{ik} \sqrt{\mu \kappa \omega}$$

für die Gegenimpedanz.

Die Koeffizienten berechnen sich wie folgt

$$b_i = b_{i-2} \frac{\text{sign}}{i(i+2)} \quad \text{mit sign} = \begin{matrix} +1 & i = 1, 2, 3, 4 \dots \\ -1 & i = 5, 6, 7, 8 \dots \end{matrix} \quad \text{wechselnd nach jeweils 4 Gliedern}$$

$$c_i = c_{i-2} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+2}$$

$$d_i = \frac{\pi}{4} b_i$$

$$k = \frac{1}{2} + \ln 2 - C \quad C = 0,57722 \quad \text{EULERSche Konstante}$$

mit den Startwerten

$$b_1 = \frac{\sqrt{2}}{6} \quad b_2 = \frac{1}{16} \quad c_2 = \frac{5}{4} - C + \ln 2 = 1,3659315$$

## 7.4 Daten von Freileitungsseilen

Nennquerschnitt mm <sup>2</sup>	Sollquerschnitt mm <sup>2</sup>	Querschnitts- verhältniszahl Al/St	Seildurch- messer mm	Gewicht kg / km	Gleichstrom- Wider- stands-belag Ω / km	Dauerstrom- belastbarkeit A
16/ 2,5	17,8	6	5,4	62	1,8793	105
25/ 4	27,8	6	6,8	97	1,2028	140
35/ 6	40,1	6	8,1	140	0,8353	170
44/32	75,7	1,4	11,2	373	0,6573	-
50/8	56,3	6	9,6	196	0,5946	210
50/30	81,0	1,7	11,7	378	0,5644	-
70/12	81,3	6	11,7	284	0,4130	290
95/15	109,7	6	13,6	383	0,3058	350
95/55	152,8	1,7	16,0	714	0,2992	-
105/75	181,2	1,4	17,5	899	0,2736	-
120/20	141,4	6	15,5	494	0,2374	410
120/70	193,4	1,7	18,0	904	0,2364	-
125/30	157,8	4,3	16,3	590	0,2259	425
150/25	173,1	6	17,1	604	0,1939	470
170/40	211,9	4,3	18,9	794	0,1682	520
185/30	213,6	6	19,0	744	0,1571	535
210/35	243,2	6	20,3	848	0,1380	590
210/50	261,5	4,3	21,0	979	0,1363	610
230/30	260,8	7,7	21,0	874	0,1249	630
240/40	282,5	6	21,8	985	0,1188	645
265/35	297,8	7,7	22,4	998	0,1094	680
300/50	353,7	6	24,5	1233	0,0949	740
305/40	344,1	7,7	24,1	1155	0,0949	740
340/30	369,1	11,3	25,0	1174	0,0851	790
380/50	431,2	7,7	27,0	1448	0,0757	840
385/35	420,1	11,3	26,7	1336	0,0748	850
435/55	490,6	7,7	28,8	1647	0,0666	900
450/40	488,2	11,3	28,7	1553	0,0644	920
490/65	553,8	7,7	30,6	1860	0,0590	960
495/35	528,4	14,5	29,9	1636	0,0584	985
510/45	555,8	11,3	30,7	1770	0,0566	995
550/70	620,9	7,7	32,4	2085	0,0526	1020
560/50	611,2	11,3	32,2	1943	0,0514	1040
570/40	610,7	14,5	32,2	1889	0,0506	1050
650/45	698,8	14,5	34,4	2163	0,0442	1120
680/85	764,5	7,7	36,0	2564	0,0426	1150
1045/45	1090,9	23,1	43,0	3249	0,0277	1580

Tabelle 7.1: Daten von Freileitungen nach DIN 48 204

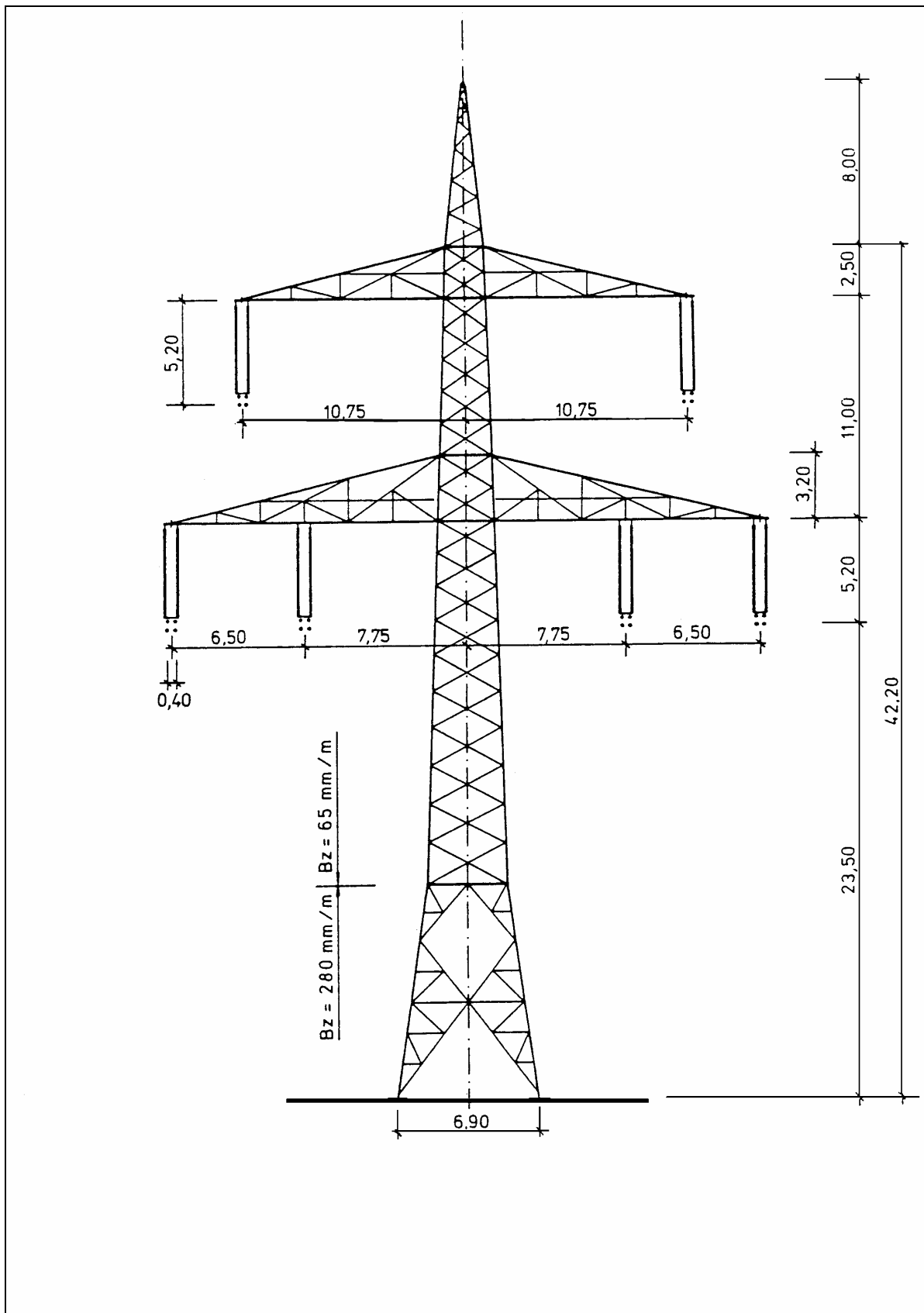


Bild 7.1: Tragmast 380-kV-Leitung mit Bemaßung (Mastgestänge D6)



### 7.5 Elektrische Daten von Freileitungen (Richtwerte)

$U_n$ / kV	$n$	$Z_w$ / $\Omega$	$P_{nat}$ / MW	$I'_C$ / A/km	$Q'_C$ / kVar/km	$I'_{CE}$ / A/km
10	1			0,02	0,35	0,03
20	1			0,04	1,4	0,06
30	1			0,06	3,1	0,1
110	1	400	30	0,18	34	0,3
220	2	280	170	0,5	190	-
380	4	230	620	1	650	-
750		260	2100	1,7	2100	-

$U_n$ / kV	$n$	$R'_1$ / $\Omega$ /km	$X'_1$ / $\Omega$ /km	$C'_1$ / nF/km	$C'_0$ / nF/km
1...30	1	0,6...0,5	0,3...0,35	12...10	4,5
110	1	0,2...0,15	0,4	9	4
220	2	0,08	0,32	11,5	6,5
380	3/4	0,03	0,25	13	7
750	4	0,01	0,29	12,5	?

Spannungsebene	$R_0 / R_1$	$X_0 / X_1$	$C_0 / C_1$
NS mit SPE	2	3	0,45
HS EL	2...8	3...2 <sup>1)</sup>	
DL	4...9	6...4	0,4...0,5 <sup>2)</sup>

Tabelle 7.2: Richtwerte von Freileitungsparametern (bei Doppelleitungen für ein System);  $n$  Anzahl der Bündelleiter; <sup>1)</sup> große Werte für Leitungen ohne Erdseile, kleine Werte für Leitungen mit 2 Al/St Erdseilen; <sup>2)</sup> größere Werte für höheres  $U_n$

Mastbild	Leiterseile Al/St	Erdseil Al/St		1 System $\Omega$ / km	2 Systeme $\Omega$ / km
Einebenenmast 110 kV	1 x 240/40	1 x 120/21	$Z'_1$	0,121+j0,380	0,121+j0,380
			$Z'_0$	0,278+j1,097	0,435+j1,606
Donaumast 110 kV	1 x 240/40	1 x 120/21	$Z'_1$	0,121+j0,383	0,121+j0,383
			$Z'_0$	0,276+j1,105	0,430+j1,644
Donaumast 220 kV	2 x 240/40	1 x 150/25	$Z'_1$	0,060+j0,303	0,060+j0,303
			$Z'_0$	0,191+j0,989	0,321+j1,503
Donaumast 380 kV	4 x 240/40	1 x 240/40	$Z'_1$	0,030+j0,266	0,030+j0,266
			$Z'_0$	0,136+j0,918	0,241+j1,400

Tabelle 7.3: Impedanzen von Freileitungen