

Hohlleiter und ihre Eigenschaften

Die **Ausbreitung elektromagnetischer Wellen** im Hohlleiter gehorcht der Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \ddot{\vec{E}} = 0 \quad (1)$$

Um die **räumliche Wellenverteilung** zu betrachten, setzt man

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(i\omega t) \quad \text{mit} \quad \vec{r} = (x, y, z) \quad (2)$$

Einsetzen in (1) liefert

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad (3)$$

mit der **Wellenzahl**

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4)$$

Für die z -Komponenten des Feldes folgt aus (3)

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -k^2 E_z \quad (5)$$

was durch den Ansatz

$$E_z(x, y, z) = f_x(x) f_y(y) f_z(z) \quad (6)$$

gelöst wird. Damit folgt aus (5)

$$\frac{f_x''}{f_x} + \frac{f_y''}{f_y} + \frac{f_z''}{f_z} = -k^2 \quad (7)$$

Man definiert

$$k_x^2 := -\frac{f_x''}{f_x} \quad k_y^2 := -\frac{f_y''}{f_y} \quad k_z^2 := -\frac{f_z''}{f_z} \quad (8)$$

Hohlleiter und ihre Eigenschaften

Damit ergibt sich

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (9)$$

Mit der Definition

$$k_x^2 + k_y^2 = k_c^2 \quad (10)$$

erhält man daraus

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_c^2} \quad (11)$$

Die Wellenausbreitung entlang des Hohlleiters (z-Achse) ist nach (8)

$$f_z'' + k_z^2 f_z = 0 \quad (12)$$

Multipliziert man diese noch mit $f_x \cdot f_y$, so folgt

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k_z^2 E_z = 0 \quad (13)$$

Diese Gleichung wird durch den Ansatz

$$E_z = E_0 \exp(i k_z z) \quad (14)$$

gelöst. Wellenausbreitung ist nur möglich, wenn k_z reell ist. Damit ergeben sich die beiden Bereiche

$$k_z = \begin{cases} \text{komplex} & \text{wenn } k_c^2 \geq k^2 \quad (\text{Dämpfung}) \\ \text{reell} & \text{wenn } k_c^2 \leq k^2 \quad (\text{Ausbreitung}) \end{cases} \quad (15)$$

Die Wellenzahl

$$k_c = \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad (16)$$

nennt man **Grenzwellenzahl**.

Hohlleiter und ihre Eigenschaften

Aus (11) folgt

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{\lambda_z^2} \quad (17)$$

oder aufgelöst

$$\lambda_z = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} \quad (18)$$

Diese Wellenlänge ist größer, als im freien Raum. Daher ist auch die **Phasengeschwindigkeit**

$$v_\varphi = \frac{\omega \lambda_z}{2\pi} > c \quad (19)$$

größer, als die des Lichtes. Aus (17) folgt noch die wichtige **Dispersionsbeziehung**

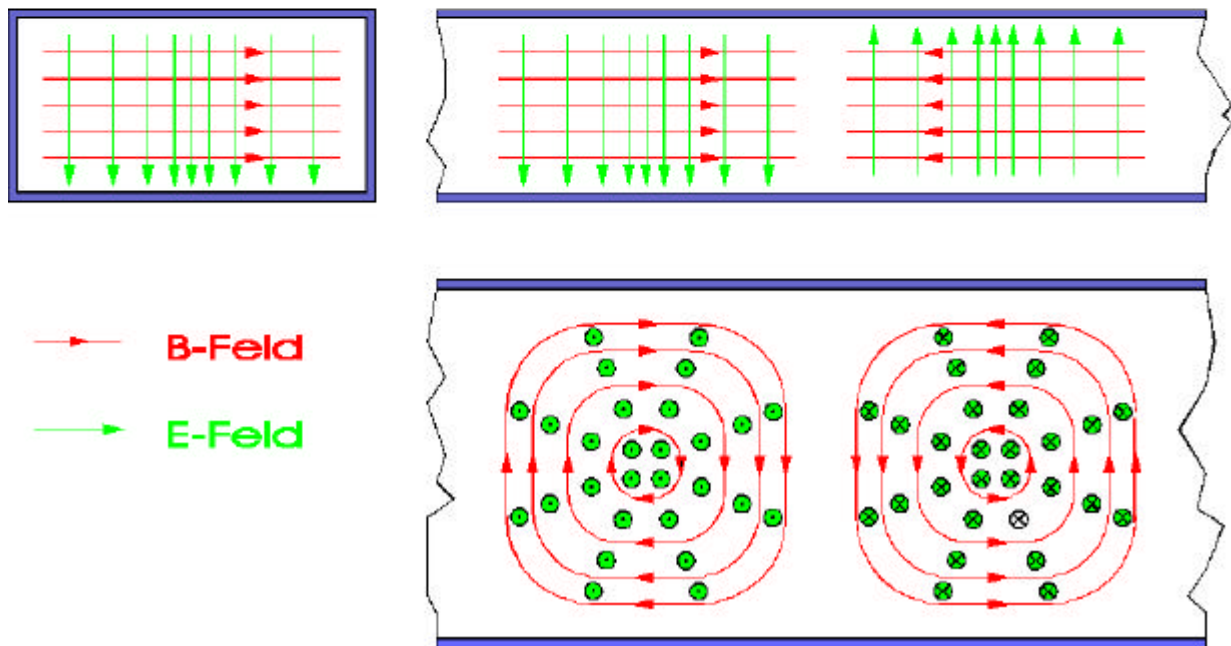
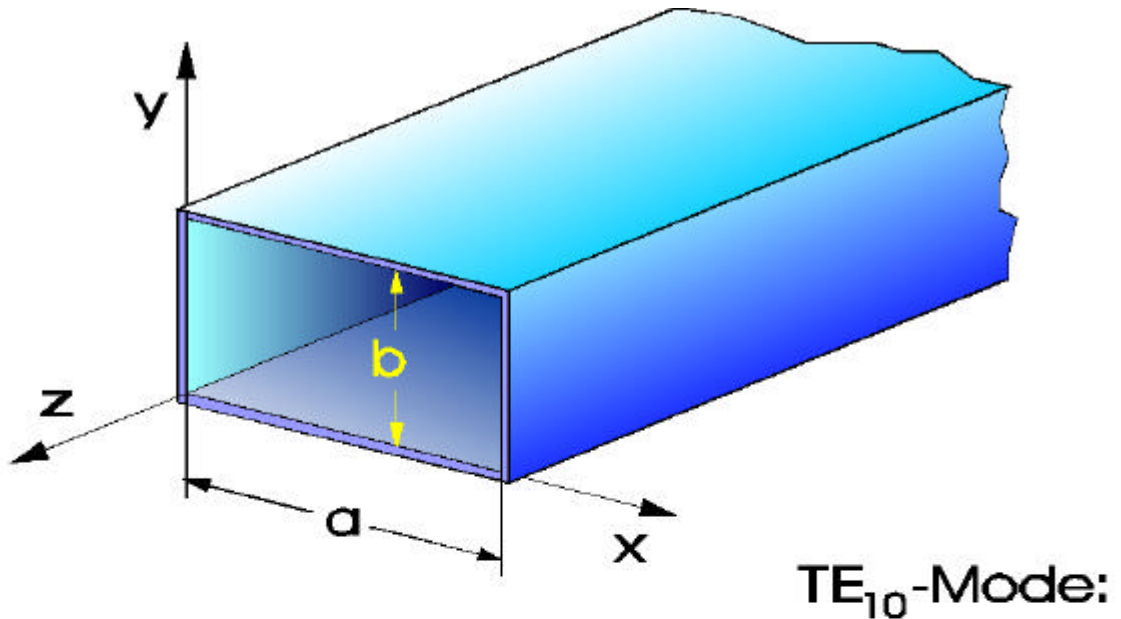
$$\omega = c \sqrt{k_z^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2} \quad (20)$$

Rechteckhohlleiter

Für die Ausbreitung der Wellen im Hohlleiter ist die Kenntnis der Grenzwellenlänge von entscheidender Bedeutung. Für den **Rechteckhohlleiter** geht man aus von

$$\begin{aligned} f_x'' + k_x^2 f_x &= 0 \\ f_y'' + k_y^2 f_y &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Hohlleiter und ihre Eigenschaften



Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{aligned}
 f_x(x) &= A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x) \\
 f_y(y) &= C \sin(k_y y) + D \cos(k_y y)
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Die Konstanten A , B , C und D ergeben sich aus

$$\begin{aligned}
 E_{\parallel} = 0 \quad \text{d.h.} \quad f_x(0) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(0) = 0 \\
 f_x(a) = 0 \quad \text{und} \quad f_y(b) = 0
 \end{aligned}$$

Hohlleiter und ihre Eigenschaften

Das wird erfüllt durch die Bedingung

$$\begin{aligned} k_x a &= m\pi \\ k_y b &= n\pi \end{aligned} \quad \text{mit} \quad m, n = \text{ganze Zahlen} \quad (23)$$

Setzt man das in (10) ein, folgt

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (24)$$

und die **Grenzwellenlänge**

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (25)$$

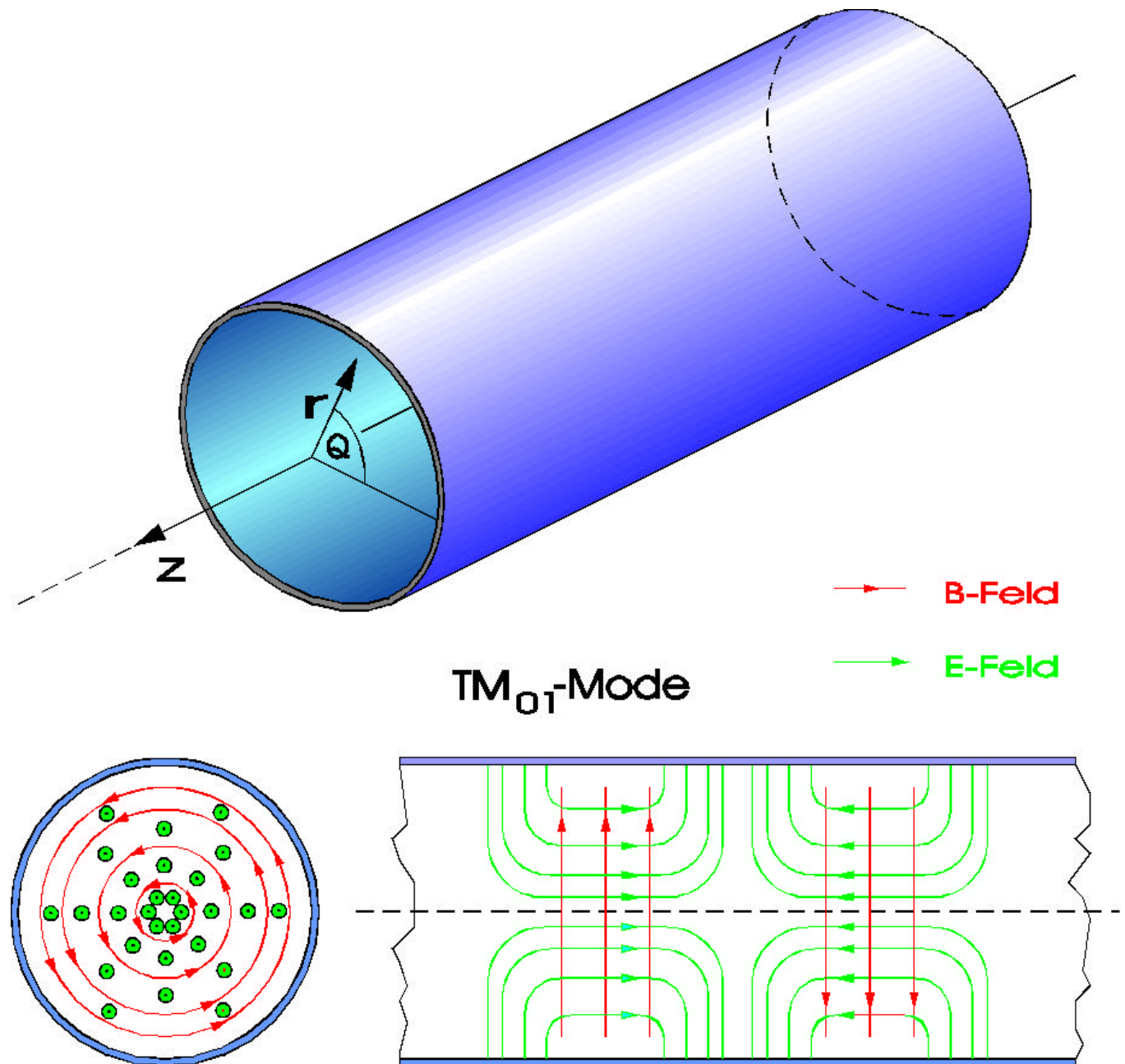
Der wichtigste Mode im Rechteckhohlleiter ist der **TE₁₀**. Der Index gibt die Anzahl der Knoten in x - und y -Richtung an. Die einzelnen Feldkomponenten sind:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \\ E_y &= \hat{E} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-i k_z z) \\ E_z &= 0 \\ H_x &= \frac{\hat{E}}{Z_0} \frac{\lambda}{\lambda_z} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-i k_z z) \\ H_y &= 0 \\ H_z &= -i \frac{\hat{E}}{Z_0} \frac{\lambda}{2a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-i k_z z) \end{aligned} \quad (26)$$

Hohlleiter und ihre Eigenschaften

Runde Hohlleiter

Bei runden Hohlleitern stellt man die Feldkonfiguration am besten in Zylinderkoordinaten $\{\Theta, r, z\}$ dar. In diesem System liefert die Lösung der Wellengleichung **Bessel-funktionen** anstelle der trigonometrischen Funktionen.



Der für die Beschleunigerphysik wichtigsten Mode ist der TM_{01} -Mode

Hohlleiter und ihre Eigenschaften

Die Komponenten des Feldes sind

$$\begin{aligned}E_r &= -i \hat{E} \frac{k_z}{k_c} J'_0(k_c r) \exp(-i k_z z) \\E_\Theta &= 0 \\E_z &= \hat{E} J_0(k_c r) \exp(-i k_z z) \\H_r &= 0 \\H_\Theta &= -i \frac{\hat{E}}{Z_0} \frac{k_z}{k_c} J'_0(k_c r) \exp(-i k_z z) \\H_z &= 0\end{aligned}\tag{27}$$

Entlang der Oberfläche des Zylinders mit dem Durchmesser D verschwindet das longitudinale elektrische Feld, also

$$E_z\left(\frac{D}{2}\right) = 0\tag{28}$$

Mit (27) erhält man daraus

$$J_0\left(k_c \frac{D}{2}\right) = 0\tag{29}$$

Wenn x_1 die 1. Nullstelle der Besselfunktion angibt, folgt

$$k_c = \frac{2x_1}{D} \quad \text{mit} \quad x_1 = 2.40483\tag{30}$$

Die zugehörige Grenzwellenlänge ist

$$\lambda_c = \frac{\pi D}{x_1}\tag{31}$$

Hohlraumresonatoren und LINAC-Strukturen

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung kann in der Form

$$W(\vec{r}, t) = A \exp\left[i(\omega t + \vec{k} \vec{r})\right] + B \exp\left[i(\omega t - \vec{k} \vec{r})\right] \quad (32)$$

geschrieben werden. Für den **verlustfreien** Hohlleiter und **Totalreflexion** ist $A = B$ und es folgt

$$\begin{aligned} W(\vec{r}, t) &= A \exp(i\omega t) \left[\exp(i\vec{k} \vec{r}) + \exp(-i\vec{k} \vec{r}) \right] \\ &= 2A \cos(\vec{k} \vec{r}) \exp(i\omega t) \end{aligned} \quad (33)$$

Durch Überlagerung der **hin-** und **rücklaufenden** Welle entsteht die **ortsfeste Amplitude** $2A \cos(\vec{k} \vec{r})$, d.h. man hat eine **stehende Welle**. Immer wenn

$$\vec{k} \vec{r} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi$$

ergeben sich Nullstellen der Welle. Zwei senkrechte leitende Bleche im Hohlleiter im Abstand

$$l = q \frac{\lambda_z}{2} \quad \text{mit} \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

erlauben eine stabile, stehende Welle („**Resonanzbedingung**“). Einsetzen in (17) liefert die **Resonanzwellenlänge** λ_r für einen Hohlraumresonator:

$$\frac{1}{\lambda_r^2} = \frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{q}{l} \right)^2 \quad (35)$$

Hohlraumresonatoren und LINAC-Strukturen

Hohlraumresonatoren aus Rechteckhohlleitern

Aus (25) folgt die **Grenzwellenlänge** für Rechteckhohlleiter in der Form

$$\left(\frac{2}{\lambda_c}\right)^2 = \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \quad (36)$$

Setzt man das in die Resonanzbedingung (35) ein, erhält man die gesuchte **Resonanzwellenlänge**

$$\lambda_r = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{q}{l}\right)^2}} \quad (37)$$

mit $m, n, q =$ ganze Zahlen.

Kreiszyklindrische Resonatoren

Hier soll nur die **TM₀₁-Welle** betrachtet werden. Dazu setzt man den Ausdruck (31) für die Grenzwellenlänge in die Resonanzbedingung (35) ein und erhält:

$$\frac{1}{\lambda_r^2} = \left(\frac{x_1}{\pi D}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{q}{l}\right)^2 \quad \text{mit} \quad q = 0, 1, 2, \dots \quad (38)$$

oder auch

$$\lambda_r = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{\pi D}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{q}{l}\right)^2}} \quad (39)$$

$x_1 = 2.4048$ ist wieder die 1. Nullstelle der Besselfunktion.

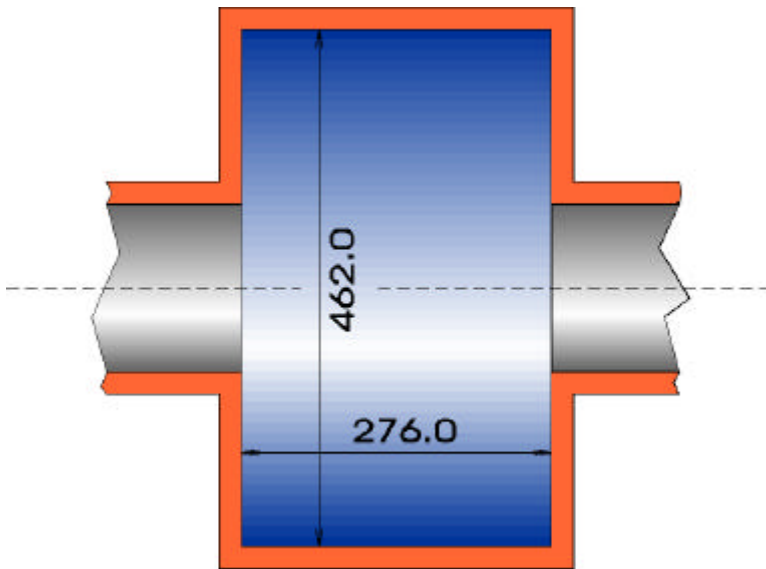
Hohlraumresonatoren und LINAC-Strukturen

Mit $q = 0$ erhält man

$$\lambda_r = \frac{\pi D}{x_1} \quad (40)$$

Das ist der **TM₀₁₀-Mode**.

Beispiel: einzelliges DORIS-Cavity

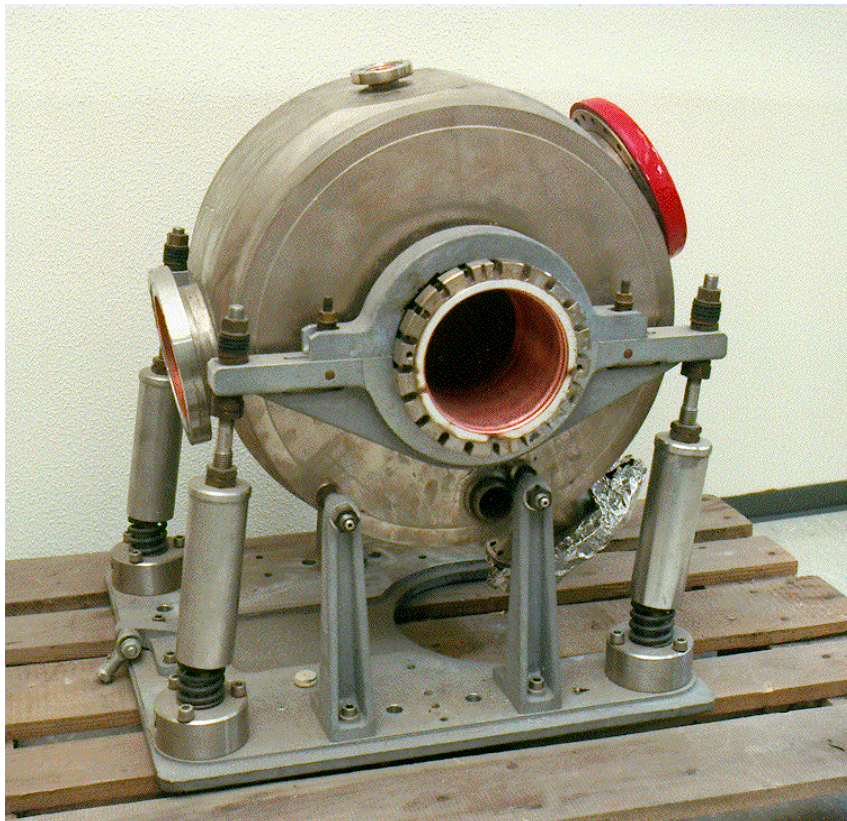


$$D = 462 \text{ mm}$$

$$l = 276 \text{ mm}$$

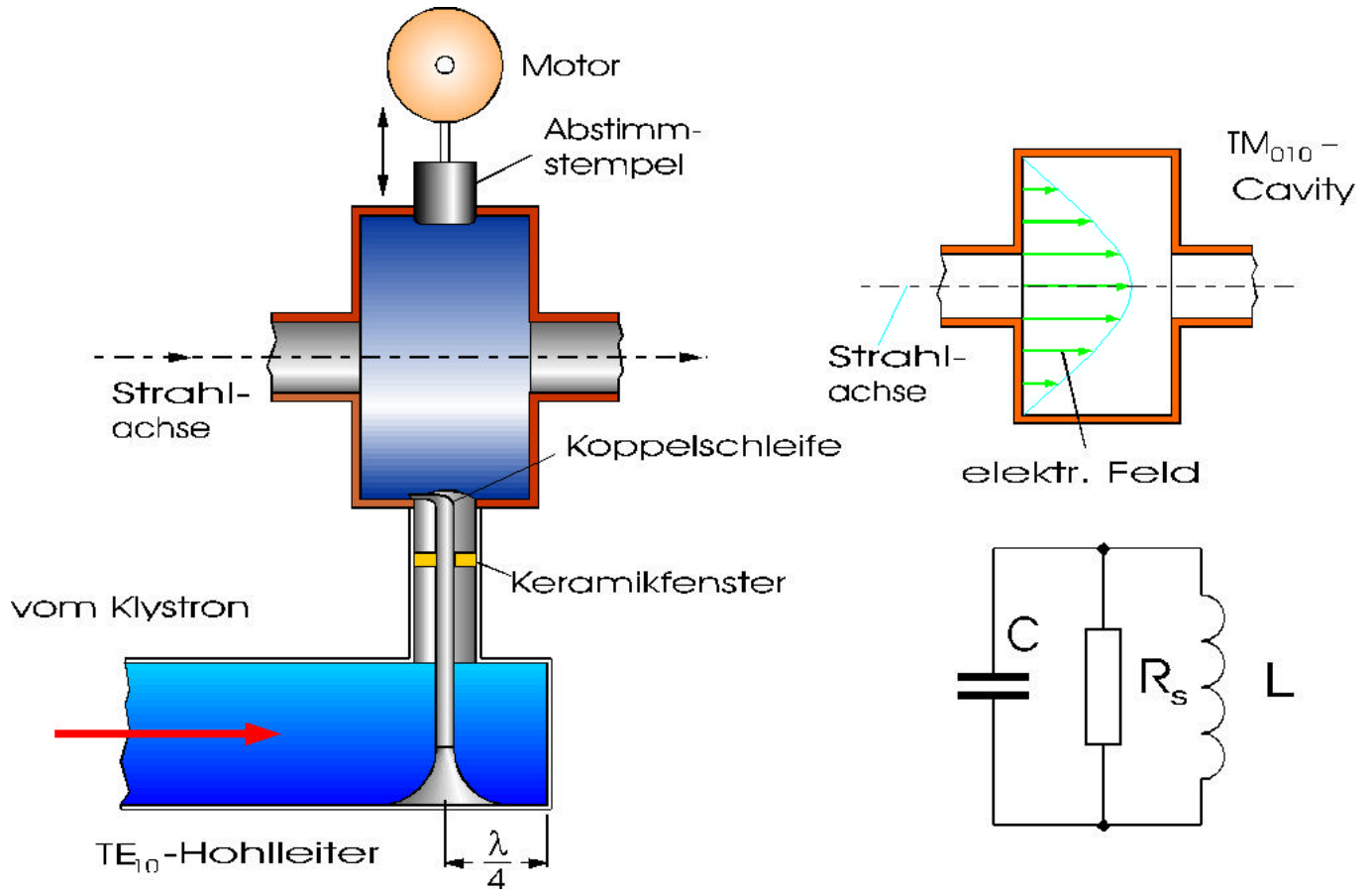
$$\lambda_r = 0.6035 \text{ m}$$

$$f_r = 496.7 \text{ MHz}$$



Hohlraumresonatoren und LINAC-Strukturen

Die HF-Leistung wird häufig über Hohlleiter zugeführt und über **induktive Schleifen** eingekoppelt.



Die Cavities haben im allgemeinen eine sehr **hohe Güte**

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = \frac{R_s}{Z} \quad (41)$$

Im Resonanzfall ist die Impedanz

$$Z = \omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (42)$$

Im Cavity entsteht im Resonanzfall die Spannung

$$U_{\text{Cav}} = \sqrt{2 P_{\text{HF}} R_s} \quad (43)$$

Hohlraumresonatoren und LINAC-Strukturen

Daten des DORIS-Cavities:

$$f_{\text{HF}} = 500 \text{ MHz}$$

$$Q = 38000$$

$$R_s = 3 \text{ M}\Omega$$

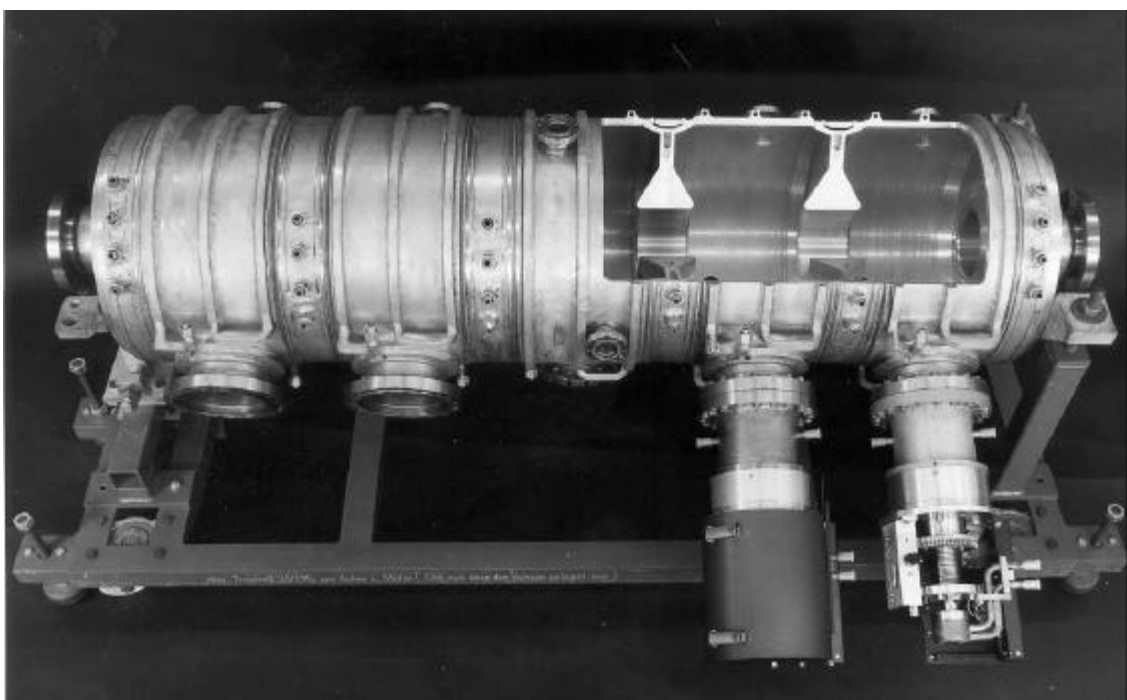
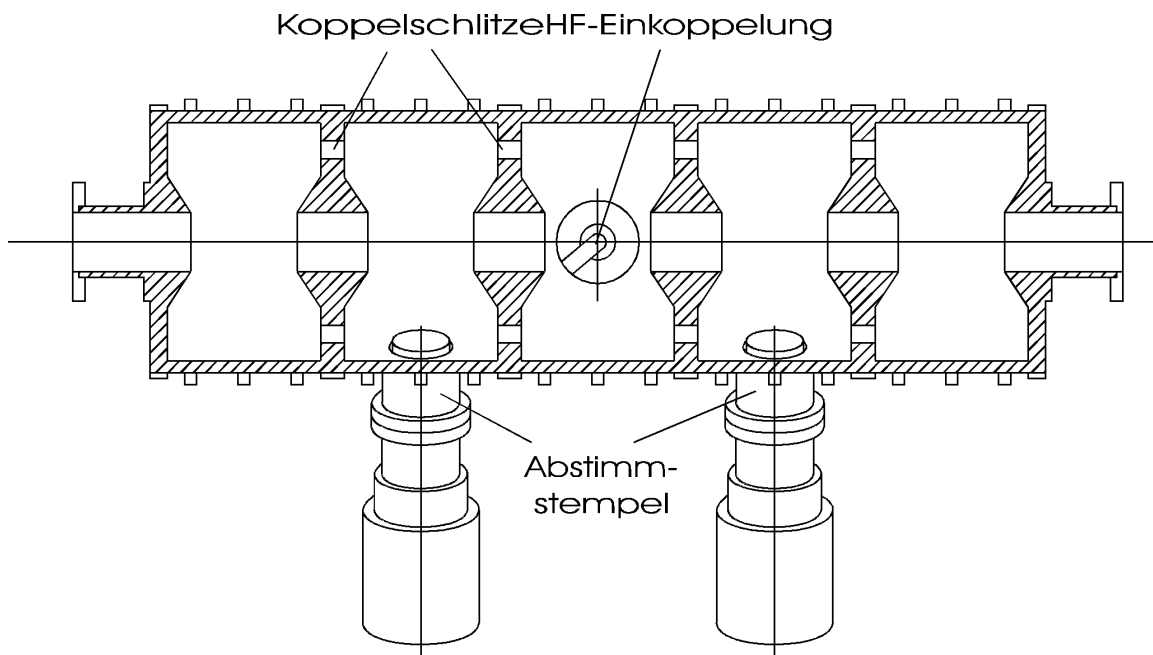
$$P_{\text{HF}} = 50 \text{ kW}$$

$$Z = 80 \text{ }\Omega$$

$$U_{\text{cav}} = 548 \text{ kV}$$

Man kann auch mehrere Zellen zusammenfassen.

Beispiel: 5-zelliges PETRA-Cavity

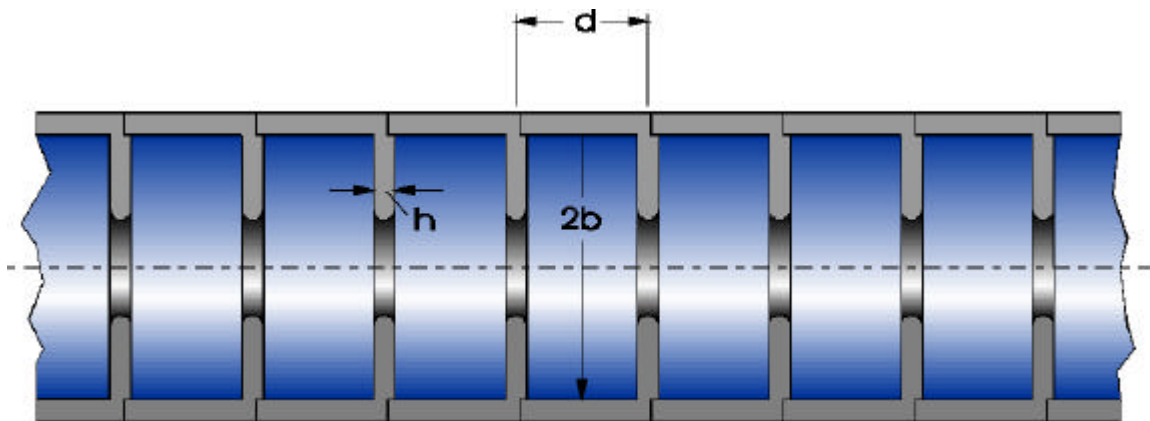


Hohlraumresonatoren und LINAC-Strukturen

Damit die **longitudinalen elektrischen Felder** in einem Hohlleiter Teilchen beschleunigen können, muß die Phasengeschwindigkeit auf Werte von

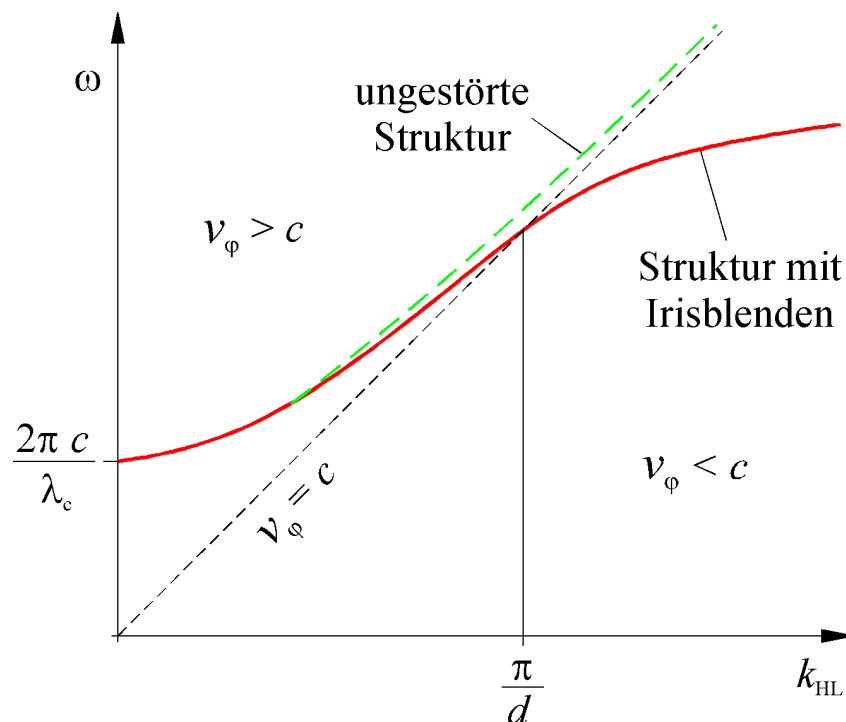
$$v_{\phi} \leq c$$

reduziert werden. Das kann man mit **Irisblenden** im runden Hohlleiter erreichen („*Runzelröhre*“):



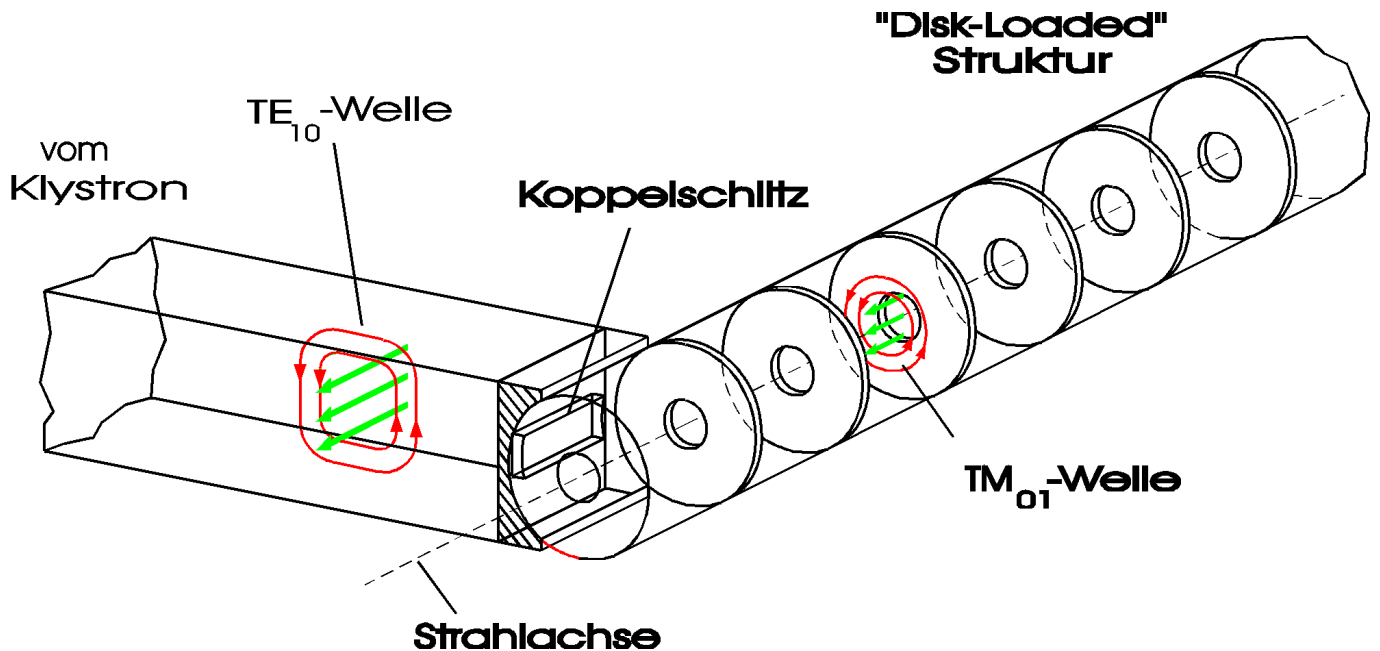
Nach der Dispersionsbeziehung ist

$$\omega = c \sqrt{k_z^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2}$$



Hohlraumresonatoren und LINAC-Strukturen

Zur Beschleunigung wird ein runder Hohlleiter im **TM₀₁-Mode** benutzt. Die Zuleitung und Einkoppelung der HF geschieht mit Hilfe eines Rechteckhohlleiters im **TE₁₀-Mode**:



Wegen der Irisblenden im Abstand d können sich in den Linac-Strukturen nur dann stabil Wellen ausbreiten, wenn

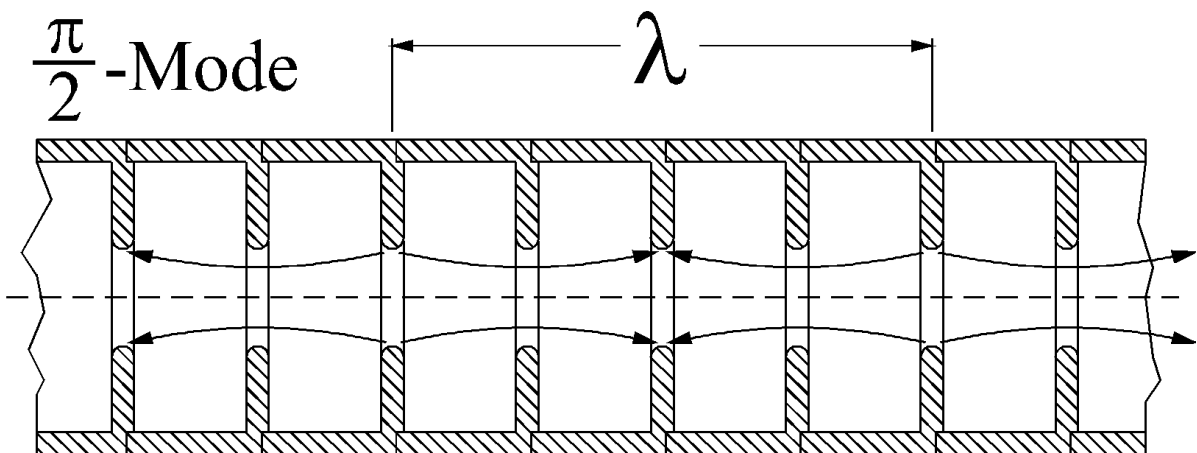
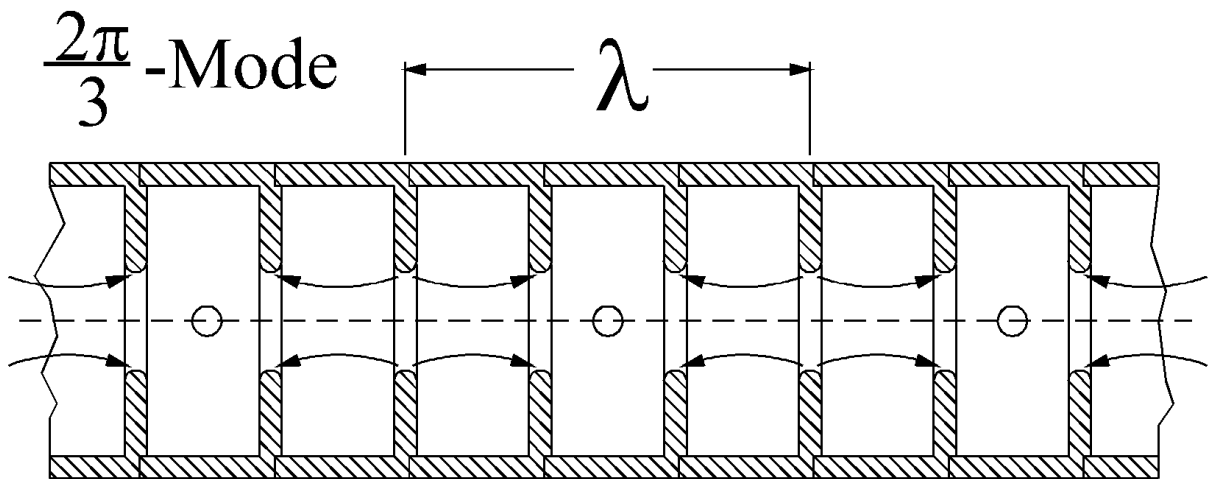
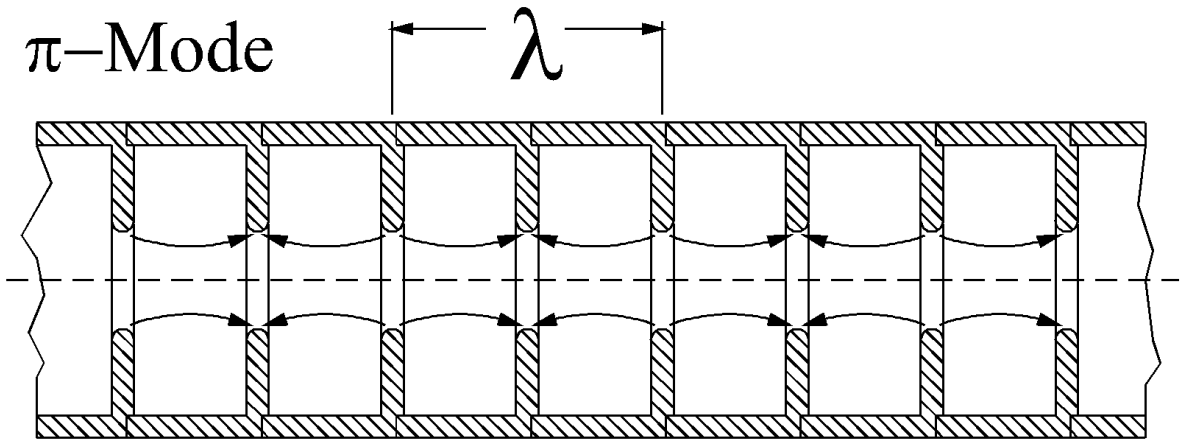
$$\lambda_z = p d \quad \rightarrow \quad \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\lambda_z} d = k_z d \quad \text{mit} \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (45)$$

Das gibt auch in longitudinaler Richtung viele Moden. Die drei wichtigsten sind

$$k_z d = \begin{cases} \pi & (\pi\text{-Mode, d.h. } \lambda_z = 2d) & \text{wenn } p = 2 \\ \frac{2\pi}{3} & (2\pi/3\text{-Mode, d.h. } \lambda_z = 3d) & \text{wenn } p = 3 \\ \frac{\pi}{2} & (\pi/2\text{-Mode, d.h. } \lambda_z = 4d) & \text{wenn } p = 4 \end{cases} \quad (46)$$

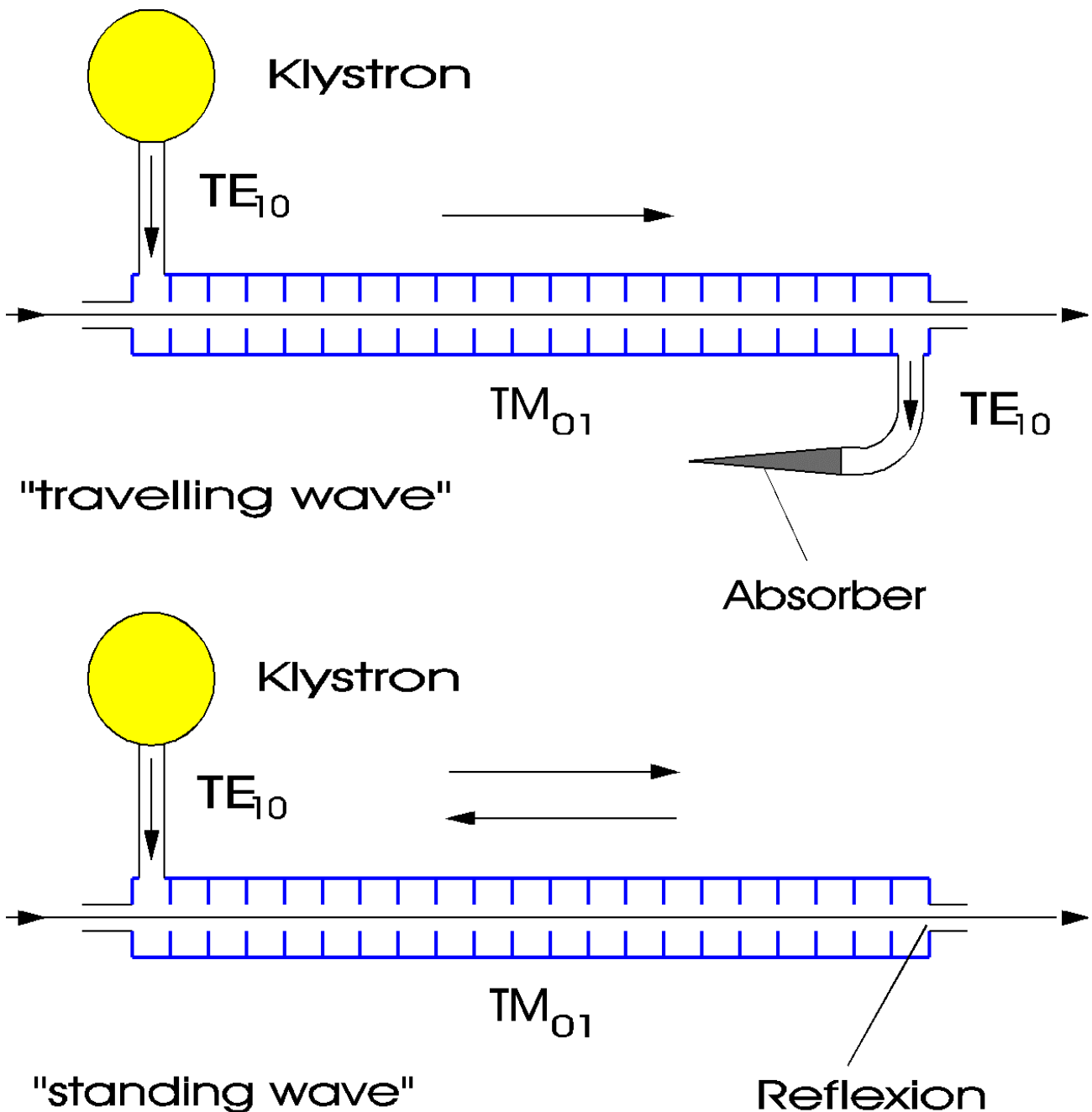
Hohlraumresonatoren und LINAC-Strukturen

Veranschaulichung der drei Moden:



Hohlraumresonatoren und LINAC-Strukturen

Linac-Strukturen können mit **stehenden Wellen** („standing wave“) oder mit **Wanderwellen** („travelling wave“) betrieben werden:



Linac-Strukturen arbeiten im allgemeinen im **S-Band**, d.h. mit

$$f_{\text{HF}} = 2.9979 \text{ GHz} \Leftrightarrow \lambda = 0.1000 \text{ m}$$

Hohlraumresonatoren und LINAC-Strukturen

Die Beschleunigungsspannung ist

$$U = K \sqrt{P_{\text{HF}} l r_0}$$

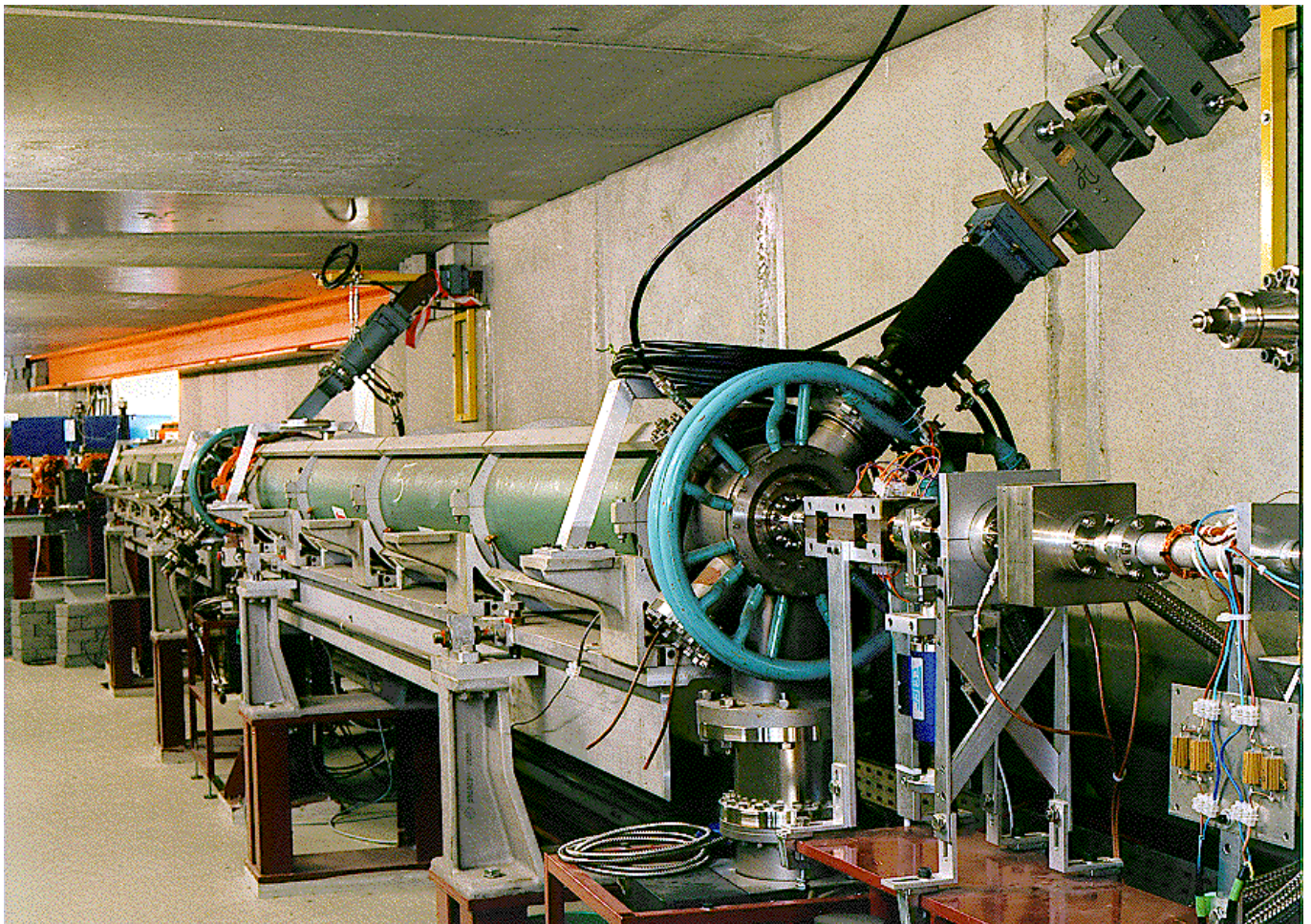
Dabei ist l die Länge der Struktur, P_{HF} die gepulste Senderleistung, $K \approx 0.8$ ein Korrekturfaktor und

$$r_0 \approx 50 \text{ M}\Omega / \text{m}$$

die Impedanz pro m. Mit $l = 3 \text{ m}$ und $P_{\text{HF}} = 35 \text{ MW}$ erhält man

$$U = K \sqrt{P_{\text{HF}} l r_0} = 59.7 \text{ MV}$$

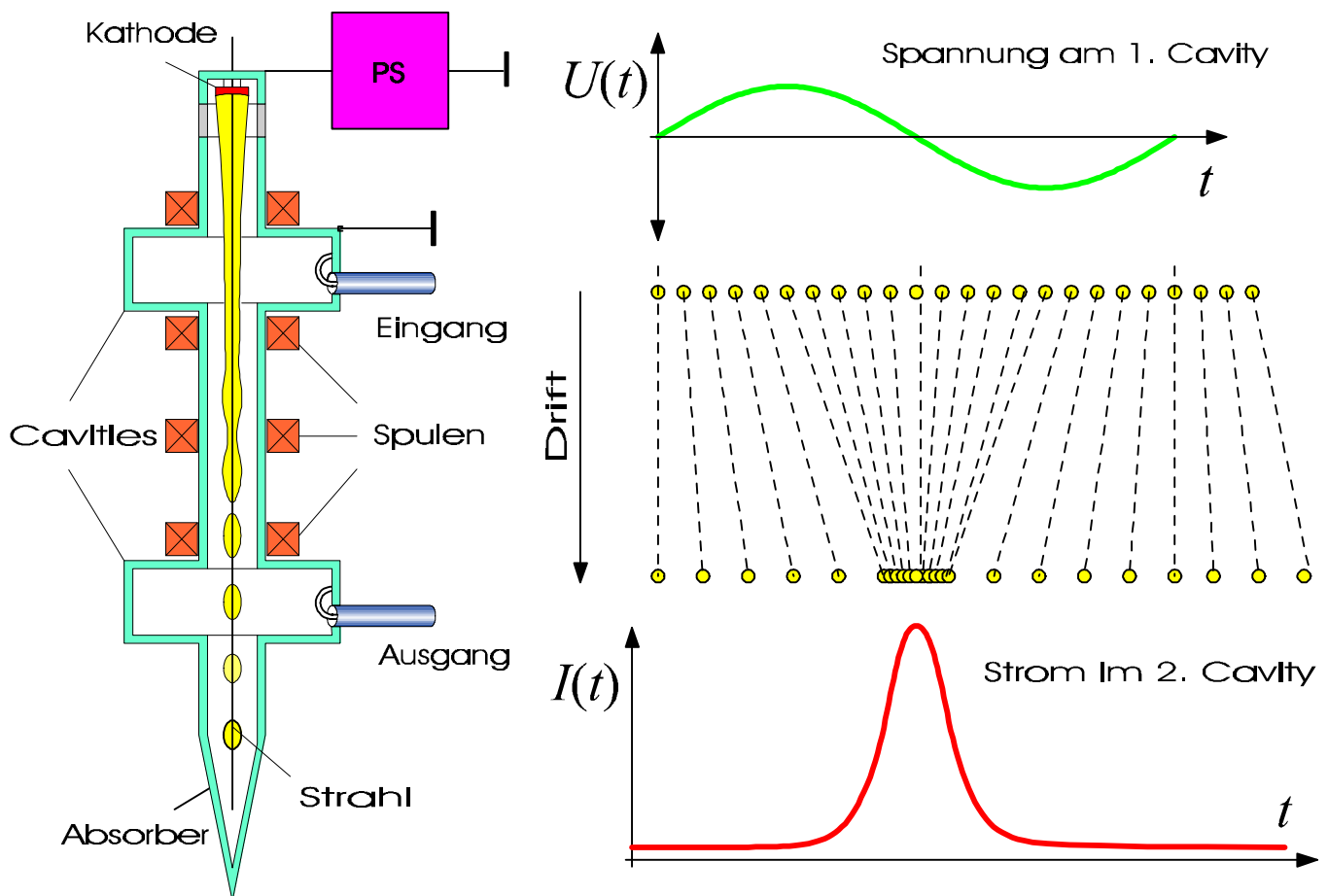
Beispiel: Der DELTA-Linac



Klystron

Um Cavities in Synchrotronen und Speicherringen zu betreiben, braucht man **HF-Dauerstrichleistungen** von einigen 10 kW bis zu über 1 MW in einem Frequenzbereich von einigen 100 MHz. Bei Linacs sind **Pulsleistungen** um 35 MW bei Frequenzen um 3 GHz üblich.

Der am meisten verbreitete Hochleistungsverstärker in diesem Frequenzbereich ist das **Klystron**. Das Prinzip mit zwei Cavities ist:



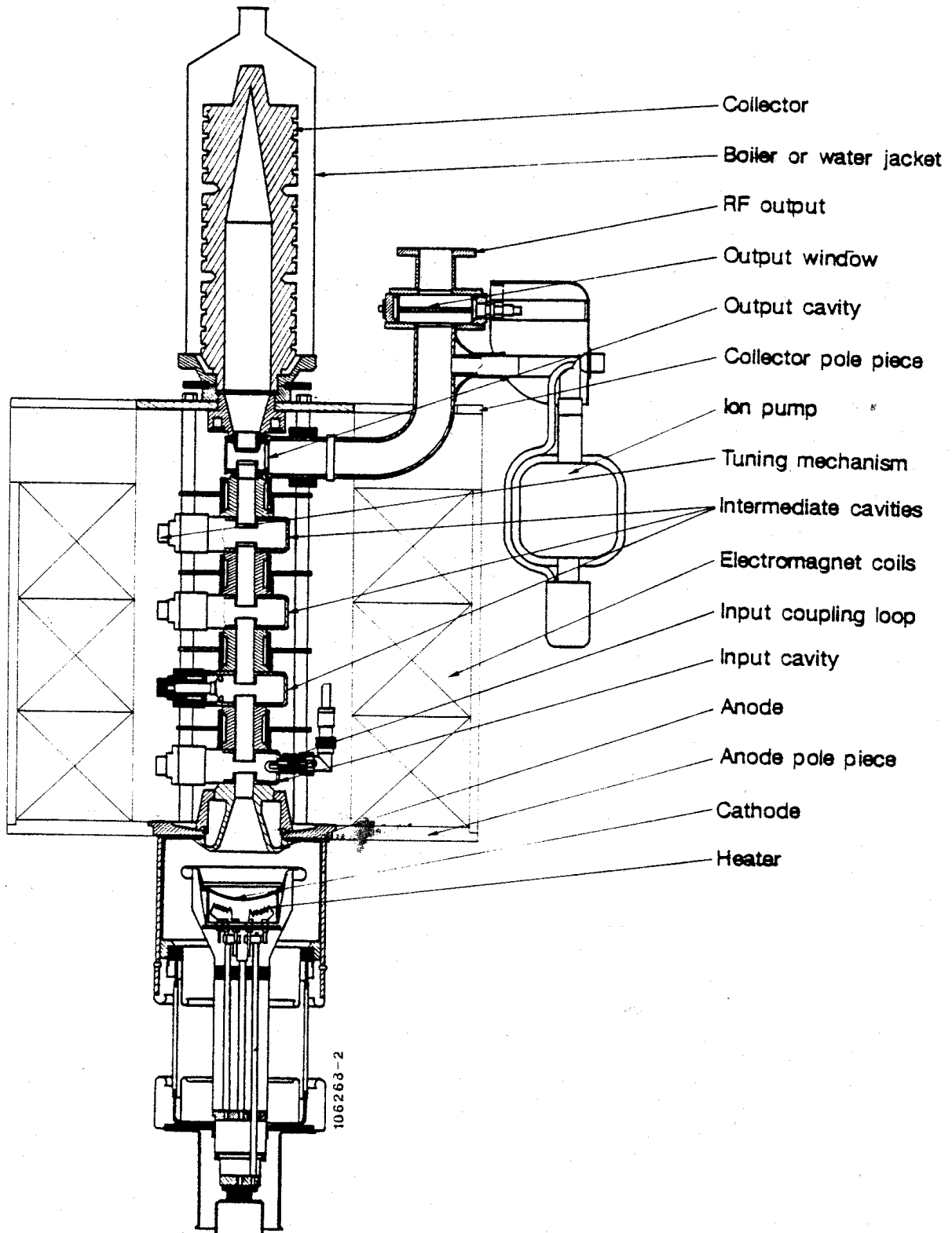
Die **Ausgangsleistung** eines Klystrons kann allgemein geschrieben werden in der Form

$$P_{\text{Klystron}} = \eta U_0 I_{\text{Strahl}}$$

Klystron

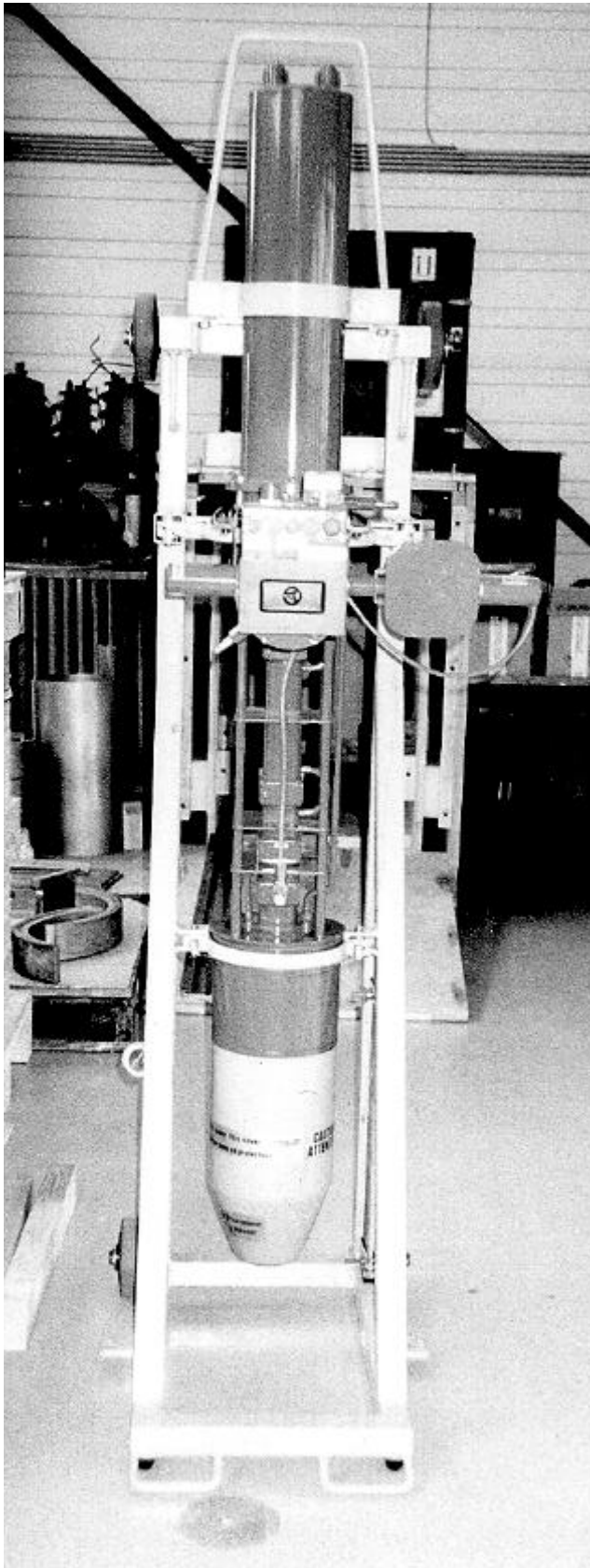
Dabei ist U_0 die Beschleunigungsspannung, I_{Strahl} der Strom des Elektronenstrahl und η der Wirkungsgrad.

Effektiver sind Röhren mit mehreren Cavities:



Klystron

Beispiel eines Linac-Klystrons



Typ: **TH 2100 D**

$$f_{\text{HF}} = 2998.5 \text{ MHz}$$

$$U_0 = 270 \text{ kV}$$

$$I_{\text{Strahl}} = 275 \text{ A}$$

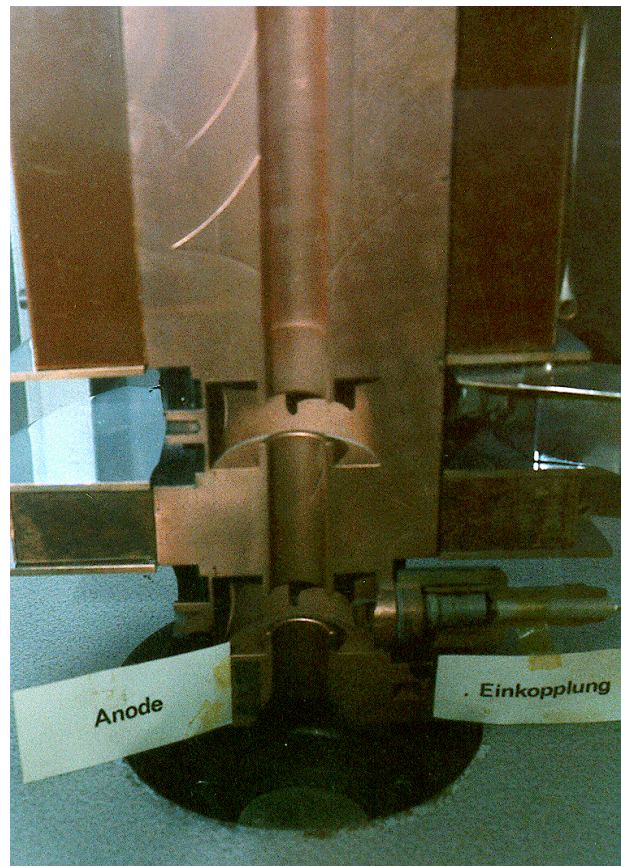
$$G = 53 \text{ dB}$$

$$\eta = 47.2 \%$$

$$\tau_{\text{Puls}} = 4.5 \mu\text{s}$$

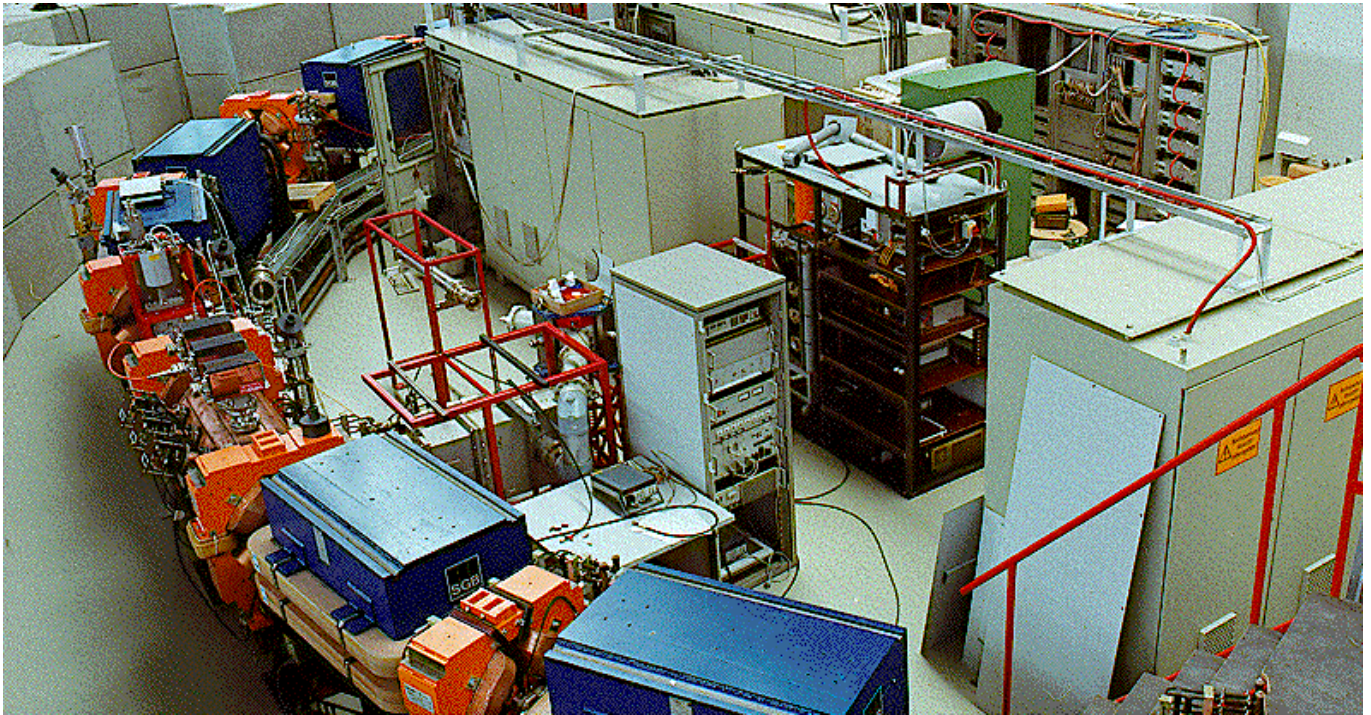
$$P_{\text{HF}} = 35 \text{ MW}$$

Schnitt durch ein Klystron:



Klystron

BoDo-Sender: 500 MHz, 30 kW

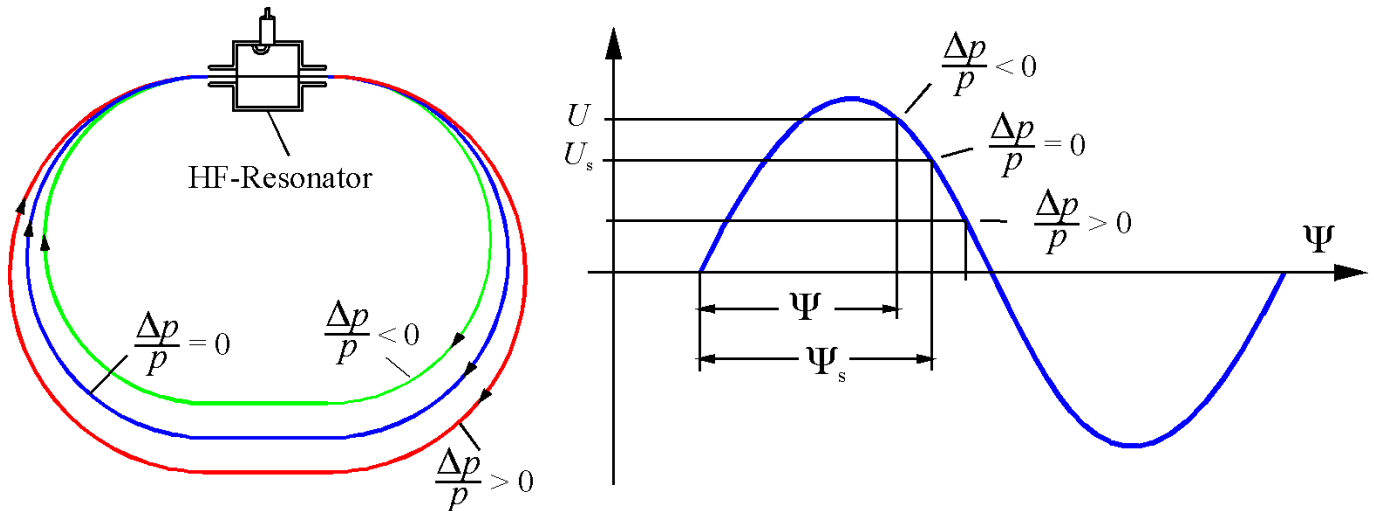


Linac-Klystrons: 3 GHz, 25 MW



Phasenfokussierung und Synchrotronfrequenz

Auch im Ringbeschleuniger muß dafür gesorgt werden, daß die Teilchen beim Umlauf im Bereich der Sollphase der HF-Spannung bleiben („*Phasenfokussierung*“).



Für ein Elektron mit Sollenergie ($\Delta p/p = 0$) ist die Energiebilanz bei einem Umlauf

$$E_0 = eU_0 \sin \Psi_s - W_0 \quad (1)$$

Dabei ist Ψ_s die Sollphase der HF-Spannung, U_0 deren Spitzenwert und W_0 der Energieverlust. Für ein beliebiges Teilchen mit einer um $\Delta\Psi$ abweichenden Phase gilt

$$E = eU_0 \sin(\Psi_s + \Delta\Psi) - W \quad (2)$$

mit

$$W = W_0 + \frac{dW}{dE} \Delta E \quad (3)$$

Die Differenz von (1) und (2) liefert

$$\Delta E = E - E_0 = eU_0 [\sin(\Psi_s + \Delta\Psi) - \sin \Psi_s] - \frac{dW}{dE} \Delta E \quad (4)$$

Phasenfokussierung und Synchrotronfrequenz

Die **Frequenz der Phasenschwingungen** ist sehr klein im Vergleich zur Umlauffrequenz $f_u = 1/T_0$, daher kann man schreiben

$$\Delta\dot{E} = \frac{\Delta E}{T_0} = \frac{eU_0}{T_0} [\sin(\Psi_s + \Delta\Psi) - \sin\Psi_s] - \frac{dW}{dE} \frac{\Delta E}{T_0} \quad (5)$$

Die Phasenabweichung $\Delta\Psi$ ergibt sich aus der unterschiedlichen Umlaufzeit der Teilchen mit Impulsabweichung. Für ein **Sollteilchen** gilt

$$T_0 = \frac{L_0}{v_0} \quad (6)$$

Für **beliebige Teilchen** erhält man

$$T = \frac{L_0 + \Delta L}{v_0 + \Delta v} \approx (L_0 + \Delta L) \frac{v_0 - \Delta v}{v_0^2} \approx \frac{1}{v_0^2} (L_0 v_0 + v_0 \Delta L - L_0 \Delta v)$$

Daraus ergibt sich die Zeitdifferenz

$$\Delta T = T - T_0 = \frac{v_0 \Delta L - L_0 \Delta v}{v_0^2} \quad (7)$$

und weiter

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{\Delta L}{L_0} - \frac{\Delta v}{v_0} \quad (8)$$

Mit dem **Momentum-Compaction-Faktor α** folgt

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \frac{\Delta p}{p} \quad (9)$$

und es gilt die relativistische Beziehung

$$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\Delta p}{p} \quad (10)$$

Phasenfokussierung und Synchrotronfrequenz

Damit folgt aus (8)

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\Delta p}{p} \quad (11)$$

Mit der Periodendauer T_{HF} der HF-Spannung erhält man die **Phasenverschiebung**

$$\Delta \Psi = 2\pi \frac{\Delta T}{T_{\text{HF}}} = \omega_{\text{HF}} \Delta T \quad (12)$$

Die HF-Frequenz und die Umlauffrequenz müssen ein ganzzahliges Verhältnis haben

$$q = \frac{\omega_{\text{HF}}}{\omega_u} \quad \text{mit} \quad q = \text{ganze Zahl} \quad (13)$$

q bezeichnet man auch als „**Harmonischenzahl**“. Damit folgt aus (11) und (12)

$$\Delta \Psi = q \omega_u \Delta T = 2\pi q \frac{\Delta T}{T_0} = 2\pi q \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\Delta p}{p} \quad (14)$$

Den Impuls ersetzt man noch durch die Energie nach

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\Delta E}{E} \quad (15)$$

und erhält

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= \frac{2\pi q}{\beta^2} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\Delta E}{E} \\ \Delta \dot{\Psi} &= \frac{\Delta \Psi}{T_0} = \frac{2\pi q}{\beta^2 T_0} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \frac{\Delta E}{E} \end{aligned} \quad (16)$$

Phasenfokussierung und Synchrotronfrequenz

Es soll zunächst nur der Fall für **sehr kleine Phasenänderungen** betrachtet werden, also $\Delta\Psi \ll \Psi_s$: Dann kann man schreiben

$$\begin{aligned} & \sin(\Psi_s + \Delta\Psi) - \sin \Psi_s \\ &= \sin \Psi_s \cos \Delta\Psi + \cos \Psi_s \sin \Delta\Psi - \sin \Psi_s \\ &\approx \Delta\Psi \cos \Psi_s \end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich (5) auf

$$\Delta\dot{E} = \frac{eU_0}{T_0} \Delta\Psi \cos \Psi_s - \frac{dW}{dE} \frac{\Delta E}{T_0} \quad (17)$$

Nochmalige Differentiation nach der Zeit liefert

$$\Delta\ddot{E} = \frac{eU_0}{T_0} \Delta\dot{\Psi} \cos \Psi_s - \frac{dW}{dE} \frac{\Delta\dot{E}}{T_0} \quad (18)$$

Einsetzen von (16) liefert

$$\Delta\ddot{E} + \frac{1}{T_0} \frac{dW}{dE} \Delta\dot{E} - \frac{2\pi q e U_0 \cos \Psi_s}{T_0^2 \beta^2 E} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \Delta E = 0 \quad (19)$$

oder

$$\Delta\ddot{E} + 2a_s \Delta\dot{E} + \Omega^2 \Delta E = 0 \quad (20)$$

mit

$$a_s = \frac{1}{2T_0} \frac{dW}{dE} \quad (21)$$

und

$$\Omega = \omega_u \sqrt{-\frac{eU_0 q \cos \Psi_s}{2\pi \beta^2 E} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \quad (22)$$

Phasenfokussierung und Synchrotronfrequenz

Die Gleichung (20) kann durch den Ansatz

$$\Delta E(t) = \Delta E_0 \exp \omega t \quad (23)$$

gelöst werden. Dann erhält man

$$\omega = -a_s \pm \sqrt{a_s^2 - \Omega^2}$$

Da die **Dämpfung sehr schwach** ist ($a_s \ll \Omega$) folgt

$$\Delta E(t) = \Delta E_0 \exp(-a_s t) \exp(i\Omega t) \quad (24)$$

Man hat also eine harmonische Schwingung, die sogenannte „**Synchrotronschwingung**“, deren Frequenz durch Ω gegeben ist.

Es ist sofort zu sehen, daß stabile Schwingungen nur möglich sind, wenn

$$\left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \cos \Psi_s < 0 \quad (25)$$

Damit ergeben sich folgende **stabile Phasenbereiche**

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} < \Psi_s < \frac{3\pi}{2} & \quad \text{wenn} \quad \alpha > \frac{1}{\gamma^2} \\ -\frac{\pi}{2} < \Psi_s < \frac{\pi}{2} & \quad \text{wenn} \quad \alpha < \frac{1}{\gamma^2} \end{aligned} \quad (26)$$

Es gibt einen Übergangsbereich, bei dem die Teilchenenergie den Wert

$$\gamma_t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad (27)$$

hat. Diese Energie heißt „**transition energy**“, bei ihr gibt es keine Phasenfokussierung.

Phasenfokussierung und Synchrotronfrequenz

Phasenstabiler Bereich (Separatrix)

Bei größeren Schwingungsamplituden geraten die Teilchen in den nichtlinearen Bereich der sinusförmigen HF-Spannung. Das kann bei extremen Amplituden zu instabilen Bewegungen führen. Bei der Berechnung der Grenzen der stabilen Schwingung kann man die ohnehin schwache Dämpfung vernachlässigen. Dann folgt aus (5) und (16)

$$\begin{aligned}\Delta\dot{E} &= \frac{eU_0}{T_0} [\sin(\Psi_s + \Delta\Psi) - \sin\Psi_s] \\ \Delta\dot{\Psi} &= \frac{2\pi q}{\beta^2 T_0 E} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \Delta E\end{aligned}\tag{28}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$\Delta\dot{\Psi} \propto \Delta E\tag{29}$$

Differenziert man diese noch einmal, erhält man

$$\begin{aligned}\Delta\ddot{\Psi} &= \frac{2\pi q}{\beta^2 T_0 E} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) \Delta\dot{E} \\ &= \frac{2\pi q e U_0}{\beta^2 T_0^2 E} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right) [\sin(\Psi_s + \Delta\Psi) - \sin\Psi_s]\end{aligned}\tag{30}$$

Die nichtlineare Bewegungsgleichung hat also die Form

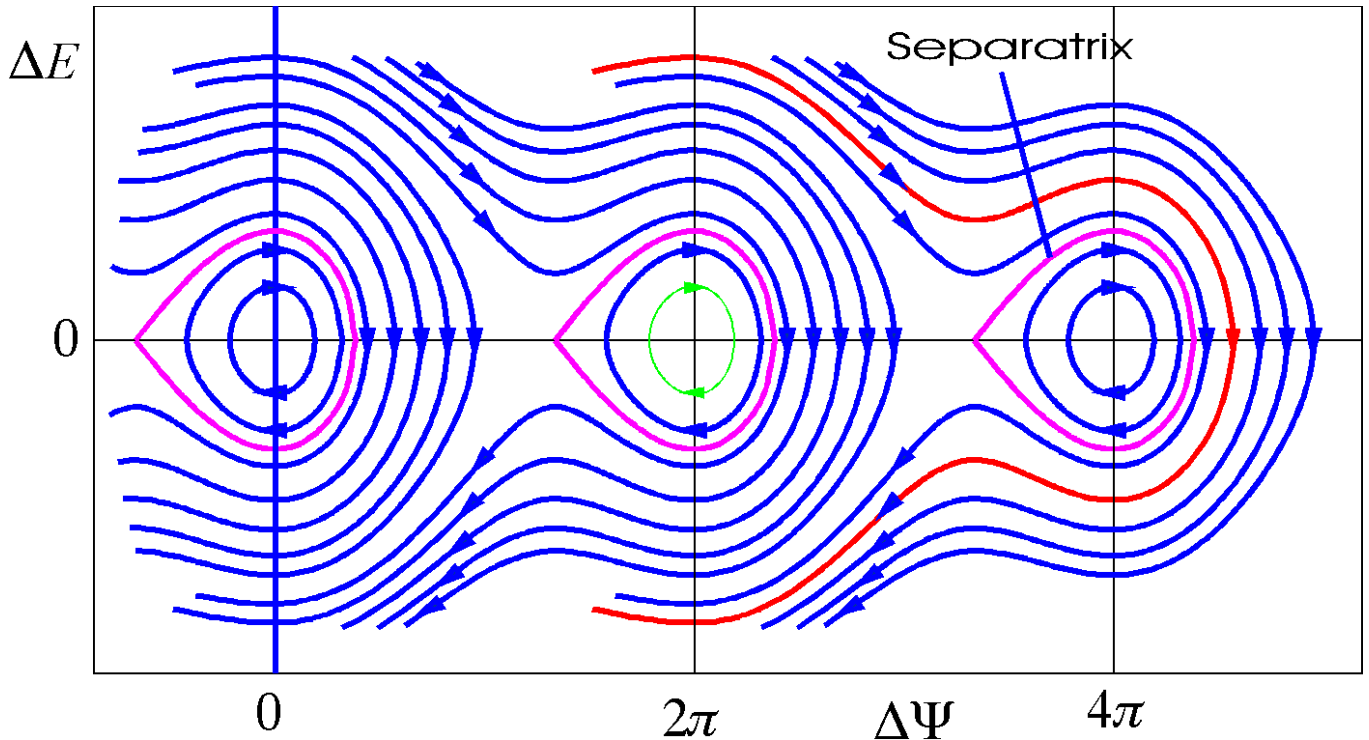
$$\Delta\ddot{\Psi}(t) + \chi [\sin(\Psi_s - \Delta\Psi) - \sin\Psi_s] = 0\tag{31}$$

mit

$$\chi = -\frac{2\pi q e U_0}{\beta^2 T_0^2 E} \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)\tag{32}$$

Phasenfokussierung und Synchrotronfrequenz

Diese Gleichung kann analytisch nicht gelöst werden. Man kann aber mit ihrer Hilfe in einem $\Delta\Psi$ - ΔE -Diagramm für bestimmte vorgegebene Anfangsbedingungen numerisch die Teilchenbewegungen berechnen:



Die Grenze zwischen dem stabilen und dem instabilen Bereich nennt man „*Separatrix*“. Zu ihrer Berechnung multipliziert man die Gleichungen (28) kreuzweise und erhält

$$\underbrace{2\Delta E \Delta \dot{E}}_{=\frac{d}{dt}(\Delta E)^2} = \frac{\beta^2 e U_0 E}{\pi q \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \left[\underbrace{\Delta \dot{\Psi} \sin(\Psi_s + \Delta\Psi) - \Delta \dot{\Psi} \sin \Psi_s}_{=-\frac{d}{dt} \cos(\Psi_s + \Delta\Psi)} \right] \quad (33)$$

Nach der Integration über die Zeit ergibt sich

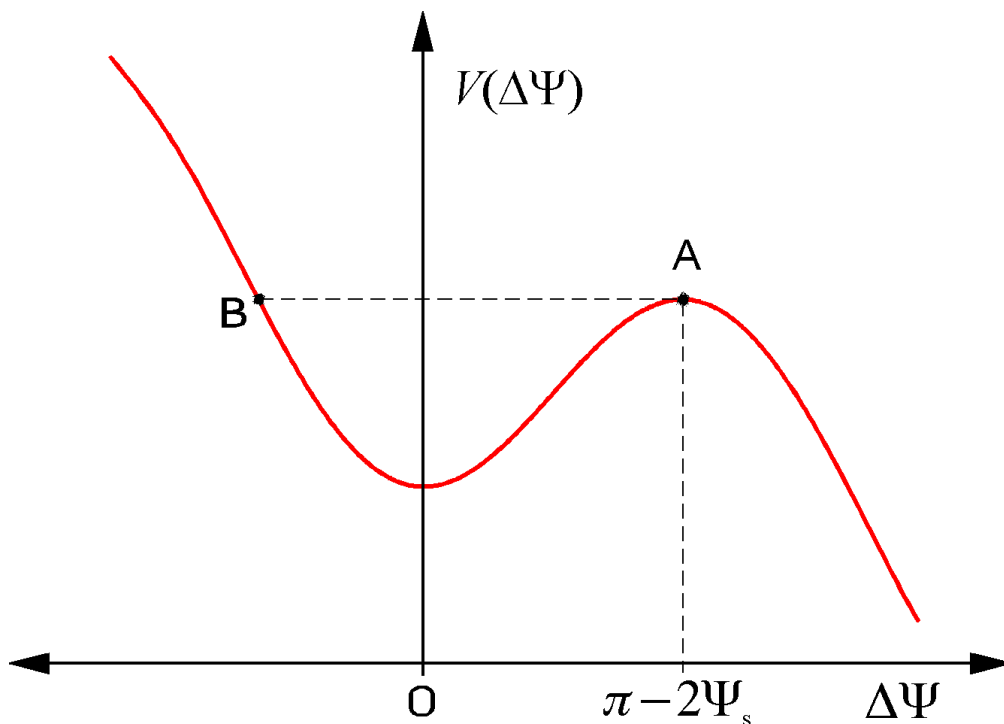
$$(\Delta E)^2 = - \frac{\beta^2 e U_0 E}{\pi q \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \left[\cos(\Psi_s + \Delta\Psi) + \Delta\Psi \sin \Psi_s \right] + H \quad (34)$$

Phasenfokussierung und Synchrotronfrequenz

Die Integrationskonstante H ist die **Hamiltonfunktion** der Schwingung, $(\Delta E)^2$ die **kinetische Energie** und

$$V(\Delta\Psi) = \frac{\beta^2 e U_0 E}{\pi q \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \left[\cos(\Psi_s + \Delta\Psi) + \Delta\Psi \sin \Psi_s \right] \quad (35)$$

die **potentielle Energie**. Der Verlauf ist



Der **maximale stabile Bereich** ist durch die Punkte **A** und **B** bezeichnet. Den Punkt **A** bestimmt man durch

$$\frac{dV}{d(\Delta\Psi)} = \frac{\beta^2 e U_0 E}{\pi q \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \left[-\sin(\Psi_s + \Delta\Psi) + \sin \Psi_s \right] = 0 \quad (36)$$

Die triviale Lösung

$$\Delta\Psi = 0$$

ist hier uninteressant.

Phasenfokussierung und Synchrotronfrequenz

Eine zweite Lösung findet man, wenn man schreibt

$$\sin \Psi_s = \sin(\pi - \Psi_s) = \sin\left(\Psi_s + \underbrace{\pi - 2\Psi_s}_{=\Delta\Psi}\right) \quad (37)$$

d.h. es existiert eine zweite Lösung

$$\Delta\Psi_{\max} = \pi - 2\Psi_s \quad (38)$$

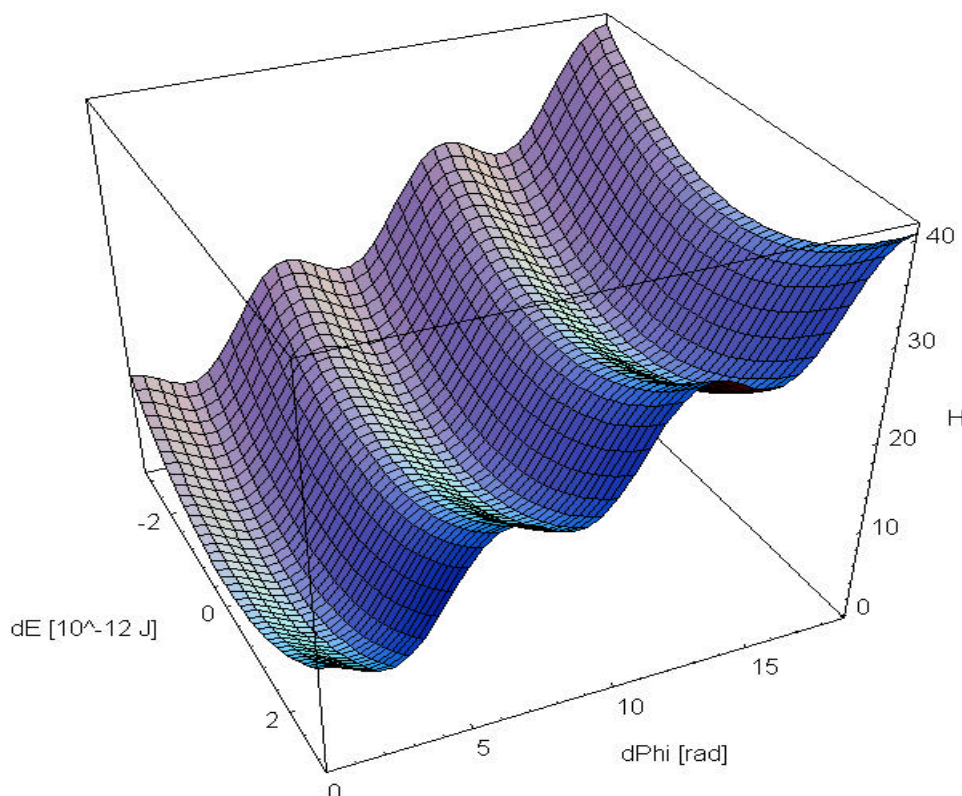
Für $\Delta E = 0$ wird damit der maximale stabile Phasenhub festgelegt. Die **Separatrix** erhält man, indem man bei der Maximalphase

$$\Delta\Psi = \Delta\Psi_{\max} = \pi - 2\Psi_s \quad (39)$$

die Energieabweichung $\Delta E = 0$ setzt. Dann wird die **Hamiltonfunktion**

$$H = \frac{\beta^2 e U_0 E}{\pi q \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \left[\cos(\pi - \Psi_s) + (\pi - 2\Psi_s) \sin \Psi_s \right] \quad (40)$$

Hamiltonfunktion der Synchrotronoschwingung



Phasenfokussierung und Synchrotronfrequenz

Einsetzen in (34) liefert die Gleichung der Separatrix

$$\begin{aligned}
 (\Delta E)^2 + \frac{\beta^2 e U_0 E}{\pi q \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \left[\cos(\Psi_s + \Delta\Psi) + \cos\Psi_s + \right. \\
 \left. + (2\Psi_s + \Delta\Psi - \pi) \sin\Psi_s \right] = 0
 \end{aligned} \tag{41}$$

oder

$$\begin{aligned}
 \Delta E = \pm \sqrt{\frac{\beta^2 e U_0 E}{\pi q \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \left[\cos(\Psi_s + \Delta\Psi) + \cos\Psi_s + \right.} \\
 \left. + (2\Psi_s + \Delta\Psi - \pi) \sin\Psi_s \right] = 0
 \end{aligned} \tag{42}$$

Reelle Lösungen sind wieder nur möglich, wenn

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{2} < \Psi_s < \frac{3\pi}{2} & \quad \text{wenn} \quad \alpha > \frac{1}{\gamma^2} \\
 -\frac{\pi}{2} < \Psi_s < \frac{\pi}{2} & \quad \text{wenn} \quad \alpha < \frac{1}{\gamma^2}
 \end{aligned} \tag{43}$$

Für $\Delta\Psi = 0$ ergibt sich die Energieakzeptanz

$$\Delta E_{\max} = \pm \sqrt{\frac{2\beta^2 e U_0 E}{\pi q \left(\alpha - \frac{1}{\gamma^2} \right)} \left[\cos\Psi_s + \left(\Psi_s - \frac{\pi}{2} \right) \sin\Psi_s \right]} \tag{44}$$

sie nimmt mit der HF-Spannung zu

$$\Delta E_{\max} \propto \sqrt{U_0} \tag{45}$$