DFG-Projekt Rechenkünstler

Strategien und Arbeitsgedächtnis eines Rechenkünstlers

Jürgen Bredenkamp und Klaus-Martin Klein
Institut für Psychologie Bonn

Zusammenfassung

In einem psychologischen Kolloquium hatte der Rechenkünstler Gert Mittring zum Erstaunen aller die 137. Wurzel aus einer 1000-stelligen Zahl ohne Hilfsmittel im Kopf richtig berechnet, wobei ihm die gestellte Aufgabe nicht bekannt war. Sofort ergab sich für uns die Frage, ob eine derartige Spitzenleistung mit derzeit bekannten Konzepten der kognitiven Psychologie aufklärbar ist.

Anhand eines speziellen Rechenproblems werden introspektive Aussagen des Experten zur Bildung von Hypothesen über algorithmische und heuristische Teile seiner bereichsspezifischen Strategie herangezogen und experimentell überprüft. Die Untersuchung des algorithmischen Teils seiner Strategie bestätigt die Hypothese eines ökonomisch und streng hierarchisch strukturierten bereichsspezifischen Zahlenwissens. Die experimentelle Überprüfung des heuristischen Teils seiner Lösungsstrategie weist Verarbeitungsfehler auf, die dem Rechenkünstler seinen introspektiven Berichten zufolge nicht bekannt waren und die zu einer Modifikation seiner Strategie im Sinne einer Entlastung des Arbeitsgedächtnisses führten.

Sich anschließende gedächtnispsychologische Untersuchungen weisen --unter anderem-- eine materialspezifische zeitliche Ausdehnung der Gedächtnisspur im Bereich des Kurzzeitgedächtnisses nach.

Zusammenfassend ergibt sich ein einheitliches Bild über das Zustandekommen der Leistung eines Experten, die mit Hypothesen und Befunden der kognitiven Psychologie erklärbar sind. Die aufgewiesenen metakognitiven Defizite auch und gerade eines Experten verweisen auf die Grenzen der introspektiven Methode, so daß es angemessen erscheint, introspektive Berichte vor allem als Ausgangspunkt für die Bildung von Hypothesen aufzufassen, die unabhängig davon experimentell überprüft werden können.

Der Rechenkünstler

Der Rechenkünstler G.M. --ein Informatikstudent (1987: 21 Jahre alt)-- löst verschiedene schwierige Rechenprobleme im Kopf und ohne Hilfsmittel.

Zu seinen Spezialitäten gehören:

* schnelle Multiplikation mehrstelliger Zahlen

* das korrekte Ziehen der 17. Wurzel aus einer 140-stelligen Zahl

* das korrekte Ausrechnen der 137. Wurzel aus einer 1000-stelligen Zahl in 47 Sekunden (spätere Bestzeit: 13.3 Sekunden)

G.M. beschäftigt sich nach eigenen Aussagen seit dem 4./5. Lebensjahr mit Zahlen bzw. rechnerischen Problemen, wobei ihn auch Kfz-Kennzeichen oder Fernsehberichte mit Daten aus der Wirtschaft zum Rechnen anregen. Zahlen haben für ihn emotionale Qualität. Die oben dargestellten Probleme werden anhand von ihm selbst entwickelter Rechenschritte gelöst; oftmals schwierig erscheinende Zwischenergebnisse werden durch vereinfachende und gedächtnisentlastende Regeln bewältigt. So beherrscht G.M. eigenen Angaben zufolge das von Rechenkünstlern häufig bevorzugte Überkreutmultiplizieren auch mit zweistelligen Zahlen.

Kognitionspsychologische Untersuchungen

Fragestellungen

- Wie ist eine derartige Leistung überhaupt möglich? Lassen sich solche Phänomene mithilfe bekannter Konzepte der Kognitionsforschung erklären?
- Welche bereichsspezifischen Rechenschritte wendet der Rechenkünstler an, um solche "phantastischen" Leistungen zu erzielen?
- Wie zuverlässig sind die subjektiven Aussagen eines Experten hinsichtlich seiner Fähigkeiten / der einzelnen Rechenschritte? Ist tatsächlich jeder Einzelschritt des Denkprozesses der Introspektion (Innenschau) zugänglich bzw. verbalisierbar?

Untersuchungsstrategie

- Genaue Beobachtung des Phänomens (Lösungszeiten, Fehler, etc.)
- Ausführliche Befragungen des Rechenkünstlers zur Vorgehensweise
- Die Aussagen des Rechnkünstlers werden zum Ausgangspunkt der psychologischen Hypothesenbildung
- Experimentelle Überprüfung der entwickelten Modellvorstellungen
- Konfrontation des Rechnkünstlers mit den Ergebnissen der experimentellen Untersuchungen

Mathematisch exakte Vorgehensweise

Bereichsunspezifische "Strategie" zur Berechnung der 137. Wurzel aus einer 1000-stelligen Zahl ("Taschenrechnerlösungsweg" = garantiert richtige Lösung):

(1000-stellige Zahl) $^{1/137}$

1. Logarithmierung der Aufgabe (also der 1000-stelligen Zahl)

2. Division durch 137

3. Bestimmung des Antilogarithmus des Quotienten

Beispiel für die Vorgehensweise des Rechenkünstlers anhand der 4. Wurzel aus einer fünfstelligen Zahl (nämlich der Zahl 10000):

$10000^{1/4} = 10$

1. Schritt: log(10000) = 4

2. Schritt: 4/4 = 1

3. Schritt: $10^{1} = 10$

Problem: Obiges "sichere", algorithmische Vorgehen läßt sich nicht anwenden, wenn die Lösung für die 137. Wurzel im Kopf errechnet werden soll; hier kann die Lösung nur heuristisch erreicht werden, das heißt: die Lösung wird häufig, aber nicht immer korrekt errechnet werden - in denkpsychologischer Terminologie handelt es sich also nicht um eine Aufgabe, sondern um ein Problem!

Experten zeichnen sich durch die Entwicklung bereichsspezifischer Strategien aus (Anderson 1985); auch der Rechenkünstler entwickelte für das Problem eine spezifische Strategie, die auf andere Probleme (zum Beispiel für die 50.Wurzel aus einer 140-stelligen Zahl) nicht angewandt werden kann.

Die Vorgehensweise des Rechenkünstlers

- Es wird nicht von der Aufgabe (1000-stellige Zahl), sondern vom Ziel (Lösungsraum) ausgegangen.
- Feststellung des Lösungsraumes:

  Alle Lösungen bestehen aus 8 Ziffern.

  Alle Lösungen liegen zwischen 19587130 und 19919117 (=331987 Lösungen).

- Alle Lösungen besitzen als Anfangsziffern immer die 19.
- Entwicklung eines Algorithmus zur Generierung der letzten drei Lösungsziffern und einer Heuristik zur Generierung der 3. bis 5. Lösungsziffer, sofern die Aufgaben nicht mit einer 0 oder einer 5 enden.

Tabelle 1: Die Vorgehensweise des Rechenkünstlers bzgl. der Lösung der Ziehung der 137. Wurzel aus einer 1000-stelligen Zahl

Position Lösungsziffer							
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
***immer* 19**		**Heuristik**			**Algorithmus**		

Untersuchungen zum Algorithmus (6. bis 8. Lösungsziffer)

Angaben des Rechenkünstlers zum Algorithmus

Tabelle 2: Zuordnung von Lösungs- und Aufgabenendungen, deren letzte Ziffer 1,3,7 oder 9 ist

	Hunderter und Zehner der Lösungsendung					
	.	00	01	02	03	04
Einer der Lösungsendung	1	001	971	141	511	081
	3	336	333	703	473	643
	7	207	377	147	517	487
	9	769	339	709	879	849

Beispiel:

Aufgabenendung = 001 -> Lösungsendung = 001

Aufgabenendung = 709 -> Lösungsendung = 029

Aufgaben- und Lösungsendungen (AE bzw. LE), die nicht in der Tabelle dargestellt sind, werden mithilfe weiterer Regeln generiert:

Regel A: wenn AE2 = AE1 + 850 dann LE2 = LE1 + 050

Regel B: wenn AE2 = AE1 + 700 dann LE2 = LE1 + 100

Beispiel: wenn AE2 = 851 dann LE=051

Experimentelle Überprüfung des Algorithmus

Abweichend von den Aussagen des Probanden, denen zufolge Tabelle 2 abgespeichert ist, wurde eine Modellvorstellung über die Repräsentation des bereichsspezifischen Wissens über AE-LE-Paare (s.o.) bei Annahme der "kognitiven Ökonomie" entwickelt:

Der RK benutzt aufgrund seines großen bereichsunspezifischen Zahlenwissens so wenig bereichsspezifisches Wissen wie möglich, um unter Anwendung weniger Regeln alles, was nicht gewußt wird, ableiten zu können. Dies dient der Gedächtnisentlastung.

So impliziert Tabelle 2 auch folgende Regeln:

Regel C: für die letzten beiden Stellen in AE und LE gilt

wenn AE2 = AE1 + 70 dann LE2=LE1 + 010

Regel D:

wenn AE1+AE2 = 850 dann LE1+LE2=050

Regeln C und D implizieren, daß der Rechenkünstler lediglich die Paare AE=001/LE=001 und AE=363/LE=003 sowie acht weitere Hunderter für AE kennen muß, um den gesamten Basisteil (Tabelle 2) generieren zu können.

Beispiel für diese Modellvorstellung:

AE = 141 --> 001 --> Regel C --> Regel C --> LE=021

Untersuchungsablauf

Die dargestellten Modellvorstellungen wurden experimentell überprüft. Hier wurden dem Probanden Aufgaben- und Lösungsendungen paarweise dargeboten, und er sollte so schnell wie möglich durch Druck auf eine "Richtnig"- oder "Falsch"-Taste anzeigen, ob die Zuordnung korrekt oder falsch war.

Die falschen Lösungen hatten denselben Zehner und Einer wie die zugehörigen richtigen Lösungen, waren also nur schwer zu erkennen. Richtige und falsche Aufgabe-Lösung-Paare waren ausbalanciert und wurden in randomisierter Folge dargeboten; die Entscheidungszeiten wurde auf eine Millisekunde genau gemessen. Der Rechenkünstler war zuvor nicht über die Art der Aufgabenstellung aufgeklärt worden und ging unvorbereitet in das Experiment.

Ergebnisse

- Es wurde nur ein einziger Fehler gemacht.
- Vergleich der beobachteten Relationen zwischen den Zeiten mit den theoretisch erwarteten zeigt eine hohe Übereinstimmung (95,5% = 420 von 440 Relationen zwischen Zeitpaaren).
- Aufgrund der Anwendung statistischer Verfahren ergeben sich folgende Schätzungen:

Aktivationszeit (1) für das Basispaar AE=001/LE=001 : 1416 msec

Aktivationszeit (1) für das Basispaar AE=363/LE=003 : 2008 msec

Regel A: 2180 msec

Regel C: 372 msec

Regel D: 448 msec

(1) die Aktivationszeiten enthalten auch noch eine psychomotorische Komponente

- Eine ähnliche Modellvorstellung wurde für gerade Aufgabenendungen entwickelt, getestet und bestätigt.
- Sowohl bei den ungeraden wie geraden Aufgabenendungen ergab sich, daß der Rechenkünstler bestimmte Regeln (zum Beispiel C und D) anwendet, über die er nicht berichtet hatte. Nachdem er mit den Untersuchungen vertraut gemacht worden war, hat er seine Ansicht über sein Vorgehen geändert.

Untersuchungen zur Heuristik (3. bis 5. Lösungsziffer)

Wie oben gezeigt, sind drei Schritte für die Bewältigung des Problems notwendig:

1. Ausrechnung des Logarithmus der Aufgabe

2. Division dieses Logarithmus durch 137 (=Lösungslogarithmus)

3. Bestimmung des Antilogarithmus vom Lösungslogarithmus

Für diese drei Schritte hat der Rechenkünstler gedächtnisentlastende Strategien zur Verfügung, die hier nicht geschildert werden (vgl. Bredenkamp 1990). Die experimentellen Untersuchungen haben gezeigt, daß Fehler ausschließlich im 2. Schritt der Heuristik auftreten, welche die größte Gedächtnisbelastung erforderlich macht. Aus diesem Grund haben wir zusätzliche Untersuchungen zum Arbeitsgedächtnis durchgeführt, die im folgenden ausschnittweise dargestellt werden.

Metakognitive Aspekte

Während der Untersuchungen zeigte sich, daß der Rechenkünstler in den vorausgehenden Befragungen fehlerhafte Angaben über die relative Schwierigkeit der einzelnen heuristischen Schritte gemacht und seine Fähigkeiten bzgl. der Lösung nicht aufgehender Wurzeln falsch eingeschätzt hatte.

Die Konfrontation mit den Untersuchungsresultaten veranlaßten den Rechenkünstler zu einer Weiterentwicklung seines Lösungsverfahrens, die vor allem in einer Reduzierung des heuristischen Anteils und einer Entlastung des Arbeitsgedächtnisses bestand. In einer später erfolgten Untersuchungsreihe gelang es ihm nicht nur, seine Lösungszeiten auf durchschnittlich 35,6 Sekunden zu verringern (Bestzeit: 13,3 Sekunden), er konnte sein Verfahren auch auf die Lösung der 137.Wurzel aus einer 1001-stelligen Zahl anwenden.

Die oben beschriebenenen metakognitiven Defizite sind insofern aufschlußreich, da sie von einem Experten stammen, von dem man meinen sollte, er sei sich jeder seiner mentalen Aktivitäten bei seiner -selbstentwickelten- Vorgehensweise voll bewußt.

Die geschilderten metakognitiven Defizite machen darüber hinaus ganz allgemein die Grenzen der introspektiven Methode deutlich; die Konsequenz für die Psychologie lautet, inrospektive Aussagen nicht als zuverlässige Daten zu betrachten, sondern lediglich als Ausgangspunkt psychologischer Hypothesen, die unabhängig davon experimentell überprüft werden sollten.

Gedächtnispsychologische Untersuchungen

Die kognitionspsycholgischen Untersuchungen legen den Schluß nahe, daß vorkommende falsche Lösungen auf Verarbeitungsfehler im Arbeitsgedächtnis zurückzuführen sind; das Arbeitsgedächtnis wird dabei als ein Gedächtnissubsystem verstanden, in dem Kurzzeit- und Abrufprozesse (Wissensbasis) erfolgen.

An dieser Stelle werden lediglich zwei von sechs Experimenten in ihren Ergebnissen referiert, die dem Bereich Kurzzeit-/Arbeitsgedächtnis zuzuordnen sind (ausführlich: Bredenkamp, J., Klein, K.-M., Hayn, S.v. und Vaterrodt, B. (1988)).

Gedächtnisspanne

Unter Gedächtnisspanne wird die Anzahl der Items verstanden, die in 50% aller Fälle in korrekter Reihenfolge wiedergegeben wird. Die Gedächtnisspanne gilt als Indikator für die Kapazität des Kurzzeitgedächtnisses. Bei normal intelligenten Erwachsenen liegt die Gedächtnisspanne für dekadische Zahlen (die Zahlen 0 bis 9) bei etwa 7 ± 2 Zahlen.

Fragestellungen (unter anderem):

- Ist die Gedächtnisspanne des Rechenkünstlers für Zahlen größer als die anderer Probanden?
- Ist die (möglicherweise) höhere Gedächtnisspanne materialspezifisch (Zahlen), oder ist diese auch für andere Materialarten (zum Beispiel: Buchstaben) nachweisbar?

Es wurden Gedächtnisspannenversuche mit folgenden Zahlenbereichen durchgeführt:

0 bis 7	0 bis 15	0 bis 31	0 bis 63	0 bis 127	0 bis 255	0 bis 511	0 bis 1023

Ergebnisse:

- Die Gedächtnisspanne des Rechenkünstlers für Ziffern beträgt 17.65, und zwar unabhängig von der Art der Zahlen! Sie ist damit etwa 2.5 mal größer als die Gedächtnisspanne der anderen untersuchten Probanden.

- Die Gedächtnisspanne für Buchstaben fällt weitaus geringer aus (ca. 8.5 Buchstaben) und ist mit der anderer Probanden (ca. 9 Buchstaben) vergleichbar. Offensichtlich kann die außerordentlich hohe Gedächtnisspanne für Ziffern also nicht auf eine erhöhte Kurzzeitgedächtniskapazität zurückgeführt werden, da die Gedächtnisspanne für Buchstaben weitaus geringer ist.

Sternberg-Paradigma (memory-scanning)

Die Versuchsperson hat hier die Aufgabe, bei Darbietung eines Testitems, welches nach der Präsentation einer in ihrem Umfang variablen, aber die Gedächtnisspanne -als Schätzer der Kapazität des Kurzzeitgedächtnisses- keinesfalls überschreitenden Itemliste erfolgt, so schnell wie möglich zu entscheiden, ob dieses Item in der zuvor dargebotenen Itemliste enthalten war oder nicht. Es findet also ein Vergleich des Testitems mit den im Kurzzeitgedächtnis enthaltenen Informationen statt. Mithilfe dieses Paradigmas ist es möglich zu schätzen, mit welcher Geschwindigkeit Vergleichsprozesse im Kurzzeitgedächtnis ablaufen. Diese Vergleichszeiten fallen in Abhängigkleit von der Art des Itemmaterials (zum Beispiel Zahlen oder Wörter) unterschiedlich groß aus: So beträgt die Vergleichszeit für Zahlen bei normal intelligenten Erwachsenen durchschnittlich etwa 40 Millisekunden je Zahl, für Wörter etwa 50 Millisekunden je Wort. Das experimentelle Paradigma ist so angelegt, daß man neben der Vergleichszeit auch Schätzungen für die Dauer der psychomotorischen Reaktion erhält. Zudem lassen sich Aussagen darüber machen, ob die Vergleichsprozesse im Kurzzeitgedächtnis seriell oder parallel, erschöpfend oder selbstterminierend erfolgen.

Fragestellungen

- Sind die Vergleichszeiten des Rechenkünstlers für Zahlen geringer als die anderer Probanden?
- Ist es möglich, daß der Rechenkünstler aufgrund seiner großen Vorerfahrung mit Zahlenmaterial dieses nicht mehr seriell, sondern parallel verarbeitet?
- sind die möglicherweise schnelleren Vergleichszeiten nur auf Zahlenmaterial beschränkt oder lassen sich bei ihm auch bezüglich anderer Materialarten (zum Beispiel Buchstaben) schnellere Vergleichszeiten als bei anderen Probanden finden.

Ergebnisse:

- Die Schätzungen für die Vergleichszeiten fallen bei der Materialart Zahlen weit geringer aus als bei den übrigen Probanden. Eindeutig verneint werden kann die Frage, ob bei dem Rechenkünstler für Zahlen eine parallele statt einer seriellen Verarbeitung stattfindet.

Regressionsgleichungen		
Materialart Zahlen		
Rechenkünstler:	Zeit = 333.85 + 27.09 * A	

Andere Probanden:	Zeit = 506.44 + 50.68 * A

Anmerkung: A bezeichnet die Anzahl der in der zu memorierenden Liste enthaltenen Elemente (1, 3 oder 5 Elemente), die Regressionskoeffizienten vor "A" schätzen die für einen Vergleich benötigte Zeit.

- Die sehr schnellen Vergleichszeiten bei Zahlen sind offensichtlich auf diese Materialart beschränkt, da der Rechenkünstler bei Buchstabenmaterial einen "normalen" Regressionskoeffizienten aufweist.

Regressionsgleichungen	
Materialart Buchstaben (Konsonanten)	
Rechenkünstler:	Zeit = 371.71 + 45.80 * A
Andere Probanden:	Zeit = 453.18 + 41.54 * A

Anmerkung: A bezeichnet die Anzahl der in der zu memorierenden Liste enthaltenen Elemente (1, 3 oder 5 Elemente), die Regressionskoeffizienten vor "A" schätzen die für einen Vergleich benötigte Zeit.

Schlußbemerkung

Die Untersuchungen zur Gedächtnisspanne und zum Sternberg-Paradigma weisen bei dem Rechenkünstler Gert Mittring eine größere Dauer des Arbeitsgedächtnisses für die Bearbeitung rechnerischer Probleme nach. Diese überlegene Arbeitsgedächtniskapazität zeigt sich auch in weiteren Untersuchungen, über die wir an dieser Stelle nicht berichten. Zurückzuführen ist dies auf die umfangreichen Vorkenntnisses des Rechenkünstlers mit Zahlen.

Literatur zur Untersuchung des Rechenkünstlers Gert Mittring:

Bredenkamp, J. (1990). Kognitionspsychologische Untersuchungen eines Rechenkünstlers. In H. Feger (Hg.): Wissenschaft und Verantwortung. Göttingen: Hogrefe.

Bredenkamp, J., Klein, K.-M., von Hayn, S. und Vaterrodt, B. (1988). Gedächtnispsychologi sche Untersuchungen eines Rechenkünstlers. Sprache und Kognition, 7, S. 69-83.

Literatur zu Rechenkünstlern allgemein:

Smith, S.B. (1983). The Great Mental Calculators. New York: Columbia University Press.