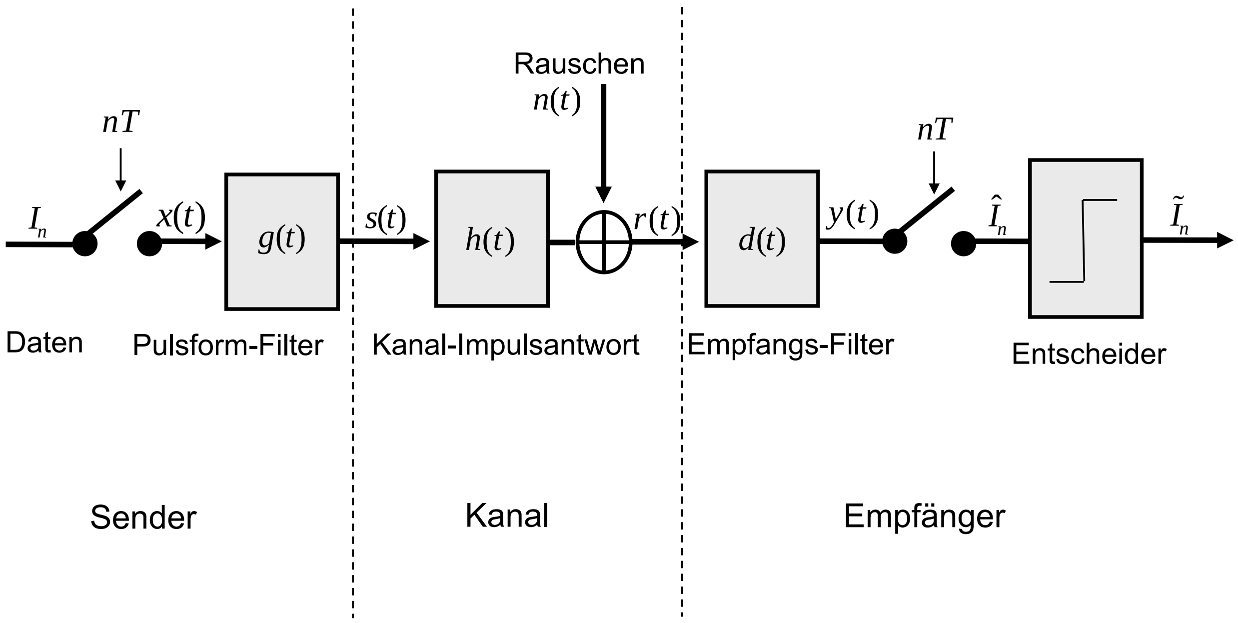
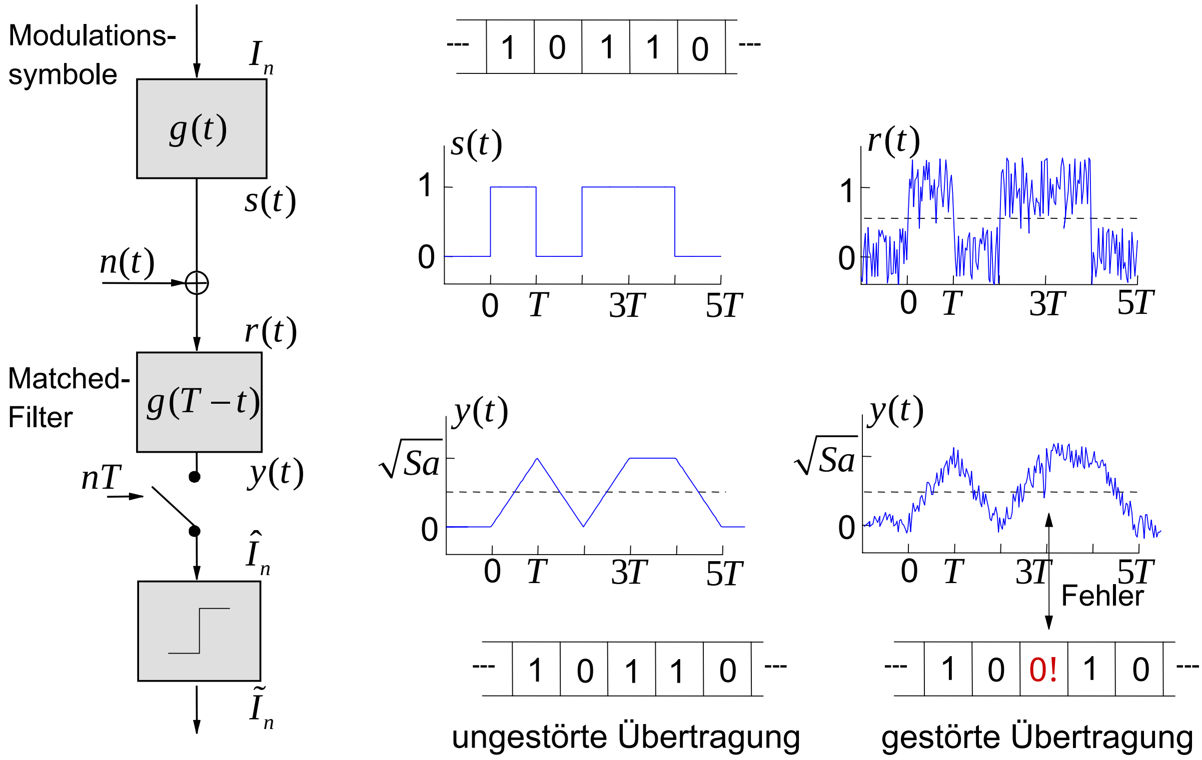
4. Digitale Übertragung im Basisband

4. Digitale Übertragung im Basisband



Signale in einem binären Übertragungssystem



Matched-Filter

Mit dem Empfangssignal $r(t) = g(t) + n(t)$ gilt am Ausgang des Empfangsfilters mit einer zunächst beliebigen Impulsantwort $d(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) d(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) d(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) d(t-\tau) d\tau.$$

Zum Abtastzeitpunkt T erhält man

$$y(T) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) d(T-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) d(T-\tau) d\tau.$$

Matched-Filter (Fortsetzung)

Die Signalleistung S zum Abtastzeitpunkt T am Ausgang des Empfangs-filters beträgt somit

$$S = \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) d(T-\tau) d\tau \right]^2 .$$

Die mittlere Rauschleistung am Ausgang des Empfangsfilters beträgt

$$N = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |D(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} d^2(t) dt.$$

Matched-Filter (Fortsetzung)

Das Signal-zu-Rauschverhältnis im Abtastzeitpunkt ergibt sich aus

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{t=nT} = \frac{\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} d(\tau) g(T-\tau) d\tau \right|^2}{N_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2(\tau) d\tau}$$

Mit der ***Schwarzschen Ungleichung*** folgt:

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} d(\tau) g(T-\tau) d\tau \right|^2 \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2(\tau) d\tau \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} g^2(T-\tau) d\tau$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{t=nT} \leq \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2(\tau) d\tau \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} g^2(T-\tau) d\tau}{N_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^2(\tau) d\tau} =: \frac{E}{N_0}$$

Matched-Filter (Fortsetzung)

Das maximale S/N-Verhältnis wird bei Gleichheit beider Terme in der Schwarzschen Ungleichung erreicht:

$$\boxed{d(t) = g(T-t)}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{t=nT} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} d^2(\tau)d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g^2(T-\tau)d\tau}{N_0 \int_{-\infty}^{\infty} d^2(\tau)d\tau} =: \frac{E}{N_0}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{max} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g^2(T-\tau)d\tau}{N_0} = \frac{E}{N_0}.$$

Übertragung von Binärsignalfolgen

Für das modulierte Sendesignal $s(t)$ gilt:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g(t-nT) \qquad \text{mit} \qquad I_n \in \{0;1\}.$$

Am Ausgang des Matched Filters erhält man ohne Berücksichtigung der Rauscheinflüsse:

$$y(t) = s(t) * g(T-t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g(t-nT)\right] * g(T-t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \varphi_{gg}^{E}(t-T-nT).$$

Übertragung von Binärsignalfolgen (Fortsetzung)

Daraus resultiert folgender Abtastwert zum Zeitpunkt $t=T$:

$$y(T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \varphi_{gg}^{E}(-nT).$$

Für $n \neq 0$ enthält die Summe unerwünschte Störterme, die von vorhergehenden Sendesymbolen abhängen.

Damit diese *Intersymbol-Interferenzen* (ISI) verschwinden, muss $\varphi_{gg}^{E}(t)$ das 1. *Nyquist-Kriterium* erfüllen:

$$\varphi_{gg}^{E}(nT) = 0 \quad \text{mit} \quad n \neq 0.$$

1. Nyquist-Kriterium für frequenzbeschränkte Signale

Für alle auf die Taktzeit T zeitbegrenzten Signale $g(t)$ ist das 1. Nyquist-Kriterium erfüllt.

Diese Signale weisen jedoch ein unbegrenztes Spektrum auf.

Gesucht:

Frequenzbeschränkte Signale, die das 1. Nyquist-Kriterium erfüllen.

Dazu wird das 1. Nyquist-Kriterium zunächst in folgender äquivalenter Form ausgedrückt:

$$\varphi_{gg}^{E}(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \varphi_{gg}^{E}(0)\,\delta(t).$$

1. Nyquist-Kriterium für frequenzbeschränkte Signale

$$\varphi_{gg}^{E}(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\varphi_{gg}^{E}(0)\,\delta(t).$$

Für die Fouriertransformierte folgt somit:

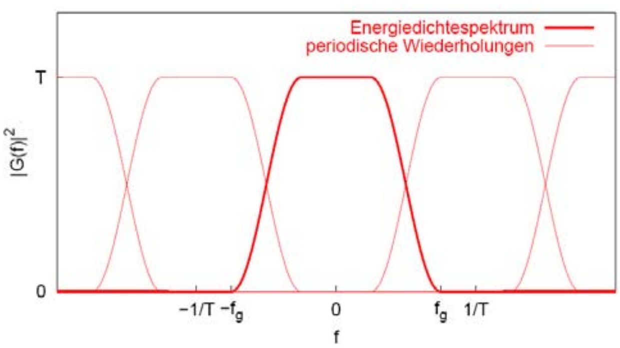
$$\left|G(f)\right|^{2} * \left[\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)\right]=\varphi_{gg}^{E}(0),$$

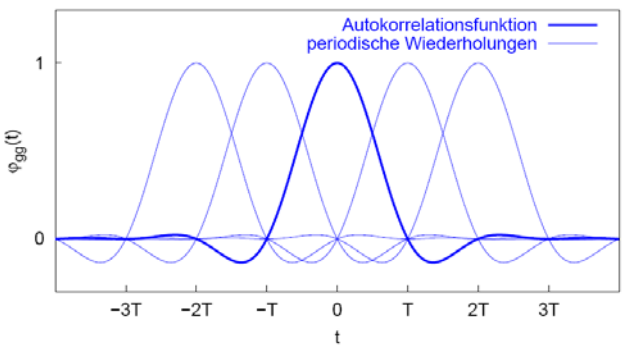
und nach Ausführung der Faltung erhält man schließlich

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|G\left(f-\frac{n}{T}\right)\right|^{2}=T\varphi_{gg}^{E}(0).$$

Das 1. Nyquist-Kriterium wird also von allen Signalen erfüllt,
deren Energiedichtespektrum periodisch wiederholt und aufsummiert
eine Konstante ergibt.

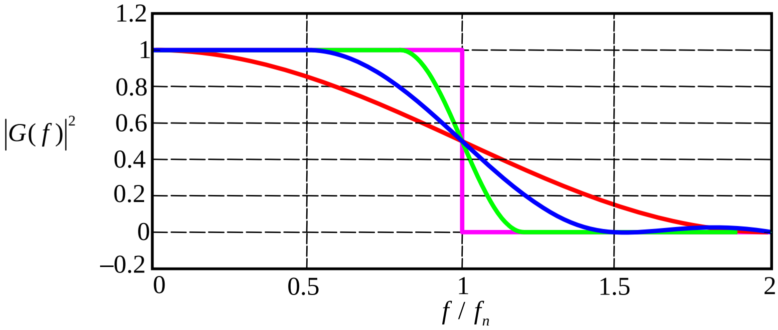
Nyquist-Flanke und Nyquist-Rate





Für alle auf den Bereich $|f|<1/T$ bandbegrenzten Signale
ist das 1. Nyquist-Kriterium genau dann erfüllt, wenn das Energiedichte-
spektrum einen zur Frequenz $1/(2T)$ schiefsymmetrischen Verlauf hat
(als *Nyquist-Flanke* bezeichnet).
Der Symmetriepunkt $f_n=1/(2T)$ ist die *Nyquist-Frequenz.*

Nyquist-Flanke und Nyquist-Rate



Durch Verkürzen der Nyquist-Flanke lässt sich die Grenzfrequenz f_g des Signals auf bis zu $f_g = 1/(2T) = f_n$ verringern.

Die Rate mit der ein Signal übertragen werden kann, ohne das 1. Nyquist-Kriterium zu verletzen, beträgt somit maximal

$$R = 1/T = 2 f_g .$$

Diese Rate wird als *Nyquist-Rate* bezeichnet.

Cosinus-Roll-Off Impuls

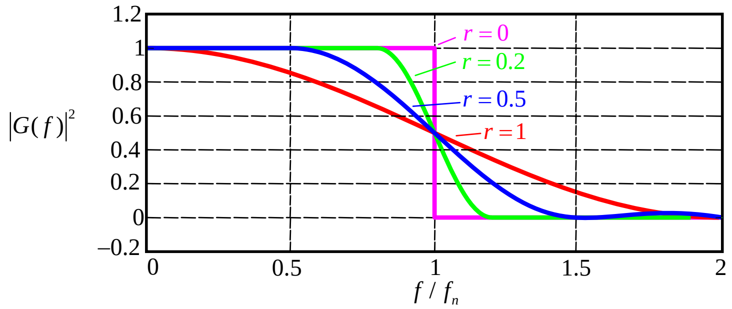
Für digitale Übertragung gebräuchlich sind sogenannte ***Cosinus-Roll-Off-*** oder ***Raised-Cosine-Impulse***. Deren AKF und LDS lautet:

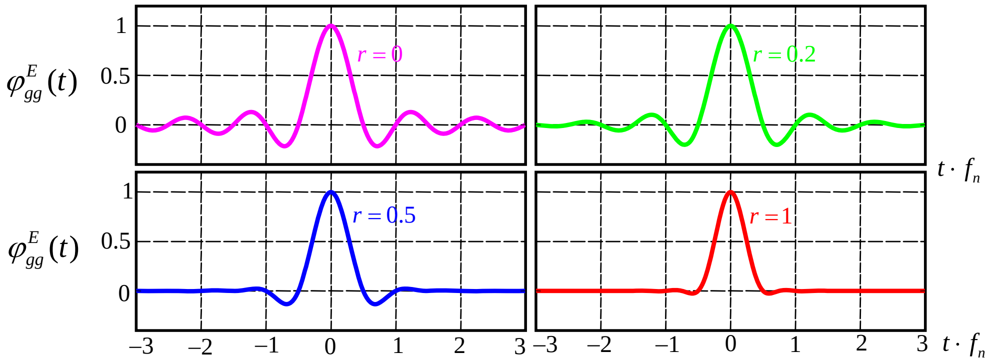
$$\varphi_{gg}^{E}(t) = 2 f_n \cdot \frac{\sin(2\pi f_n t)}{2\pi f_n t} \cdot \frac{\cos(2\pi f_n r t)}{1 - (4 r f_n t)^2}$$

$$|G(f)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \dfrac{|f|}{f_n} \le 1 - r \\ \dfrac{1}{2}\left[1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2r}\left(\dfrac{f}{f_n} - (1-r)\right)\right)\right] & \text{für} \quad 1 - r \le \dfrac{|f|}{f_n} \le 1 + r \\ 0 & \text{für} \quad \dfrac{|f|}{f_n} \ge 1 + r \end{cases}$$

Der Parameter r heißt ***Roll-Off-Faktor***. Aus der Flankensymmetrie von $|G(f)|^2$ folgt die Einhaltung der 1. Nyquist-Bedingung. Die Formel für $g(t)$ im Zeitbereich ergibt sich aus der Wurzel von $\varphi_{gg}^{E}(t)$.

Cosine-Roll-Off-Impulse (Fortsetzung)





Datenrate: $R = \frac{1}{T}$ Grenzfrequenz: $f_g = \frac{1+r}{2T}$

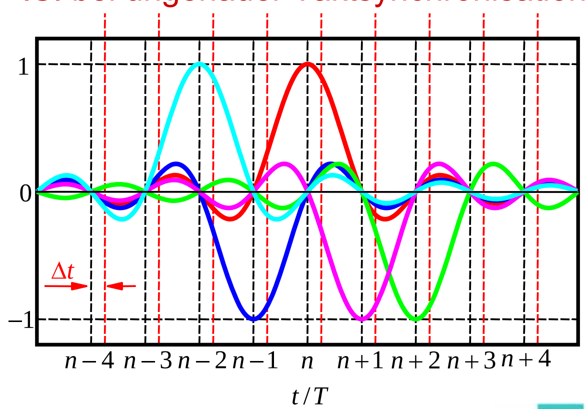
Intersymbol-Interferenz für nicht ideale Abtastung

Erfüllt die Autokorrelierte des Modulationsimpulses $g(t)$ die 1. Nyquist-bedingung, so ist prinzipiell eine Übertragung ohne Intersymbol-Interferenz möglich.

Aber: ISI-Freiheit erfordert perfekte Rekonstruktion des *Symboltaktes* beim Empfänger!

Beispiel: si-förmige Modulationsimpulse, $g(t) = \varphi_{gg}^E(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t / T}$

ISI bei ungenauer Taktsynchronisation



Intersymbol-Interferenz für nicht ideale Abtastung

Beispiel: (Fortsetzung)

Der bei Fehlerabtastung um Δt maximal auftretende Fehler beträgt

$$F = \max\{\Delta I_n\} = \sum_{\substack{v=-\infty \\ v\neq 0}}^{\infty} \left| si\left(\pi\left(v+\frac{\Delta t}{T}\right)\right)\right|$$

Für $\frac{\Delta t}{T} \ll 1$ gilt näherungsweise

$$si\left(\pi\left(v+\frac{\Delta t}{T}\right)\right) \approx \frac{\Delta t\cdot(-1)^v}{vT}$$

Es folgt

$$F \approx \sum_{\substack{v=-\infty \\ v\neq 0}}^{\infty} \frac{\Delta t}{|v|T} = 2\cdot\frac{\Delta t}{T}\cdot\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{v}$$

Die Reihe konvergiert nicht.

$\Longrightarrow$ Bereits geringste Abtast-Abweichungen verhindern eine fehlerfreie Detektion.

Augendiagramm

Die Eignung einer Impulsform für die Datenübertragung kann im ***Augendiagramm*** veranschaulicht werden.
Ein stochastisches Datensignal wird dazu abschnittsweise derart übereinandergezeichnet, dass die Zeitpunkte

$$t+vT \qquad \text{und} \qquad t+\mu T, \qquad v,\mu = 0,1,2,\ldots$$

zur Deckung kommen.

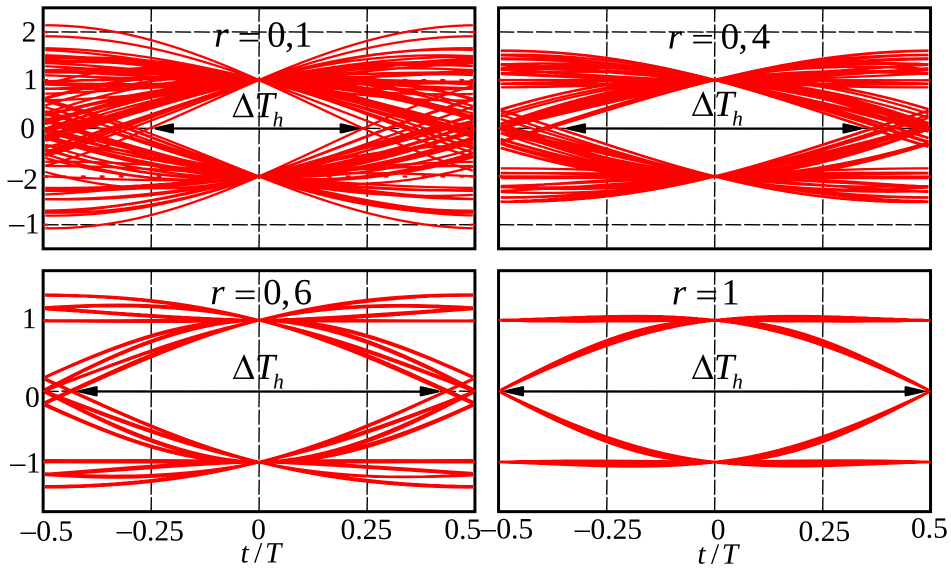
Beispiel:

Cosinus-Roll-Off-Impulse in der Form

$$\varphi_{gg}^{E}(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}\cdot\frac{\cos(\pi r t/T)}{1-(2rt/T)^2}$$

Augendiagramm (Fortsetzung)

Beispiel: (Fortsetzung)



Die ***relative horizontale Augenöffnung*** $h = \frac{\Delta T_h}{T}$

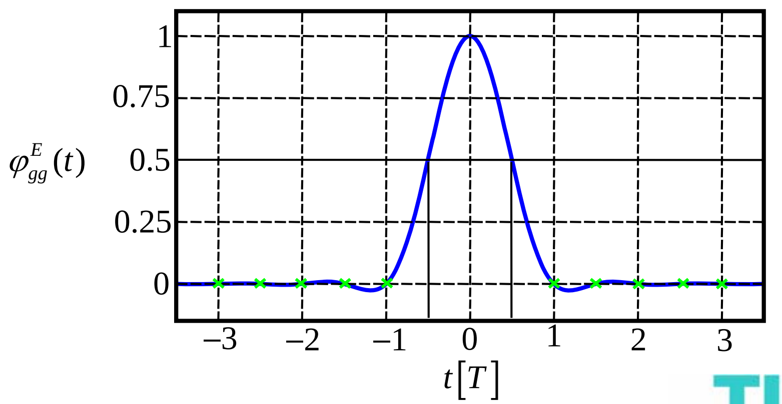
ist ein Maß für die Empfindlichkeit gegenüber Abtastabweichungen.

Zweite Nyquist-Bedingung

Die relative horizontale Augenöffnung nimmt den maximal möglichen Wert $h_{\max} = 1$ an, wenn die ***zweite Nyquist-Bedingung***

$$\varphi_{gg}^{E}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t=0 \\ 1/2 & \text{für} \quad t = \pm T/2 \\ 0 & \text{für} \quad t = \nu T/2, \nu = \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots \\ \text{beliebig} & \text{sonst} \end{cases}$$

erfüllt ist.



Zweite Nyquist-Bedingung (Fortsetzung)

Für das Datensignal folgt bei Einhaltung der 2. Nyquist-Bedingung

$$x(\mu T) = I_\mu$$

$$x\left((2\mu+1)\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(I_\mu + I_{\mu+1}\right)$$

Für eine bipolare Datenübertragung, d.h. $I_n \in \{-1,1\}$ kann das Datensignal zu den Zeitpunkten

$$t = (2\mu+1)\frac{T}{2}$$

nur die Werte +1,-1 oder 0 annehmen

(vgl. Cosinus-Roll-Off-Impulse mit $r=1$).

Die Einhaltung des 2. Nyquist-Kriteriums erfordert gegenüber der Übertragung mit si-Impulsen die *doppelte Bandbreite*!

Spektrum eines Datensignals

Spektrum eines Datensignals

Betrachte ein Zeitsignal der Form

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n g(t - nT),$$

wobei I_n eine zufällige Datenfolge darstellt.

Die AKF ergibt sich zu

$$\varphi_{xx}(t,\tau) = E\{x(t)x(t+\tau)\} = E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} I_n g(t-nT) I_l g(t+\tau-lT)\right\}$$

Substituiere $\lambda = n - l$:

$$\varphi_{xx}(t,\tau) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(E\{I_{\lambda+l}I_l\}\cdot g(t-(\lambda+l)T)\cdot g(t+\tau-lT)\right)$$

$$= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varphi_{ii}(\lambda) g(t-(\lambda+l)T) g(t+\tau-lT)$$

mit $$\varphi_{ii}(\lambda) = E\{I_{\lambda+l}I_l\}.$$

Spektrum eines Datensignals (Fortsetzung)

$$\varphi_{xx}(t,\tau) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\varphi_{ii}(\lambda) g(t-(\lambda+l)T) g(t+\tau-lT)$$

$$= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\varphi_{ii}(\lambda)\sum_{l=-\infty}^{\infty} g(t-lT-\lambda T)\cdot g(t-lT+\tau)$$

φ_{xx} ist periodisch, also $\varphi_{xx}(t,\tau) = \varphi_{xx}(t+T,\tau)$

$\longrightarrow$ **zyklostationärer Prozess**

Ist der Prozess ergodisch, so kann die AKF für die Berechnung des Leistungsdichtespektrums über eine Periode ermittelt werden:

$$\bar{\varphi}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\varphi_{xx}(t,\tau)\,dt$$

Spektrum eines Datensignals (Fortsetzung)

$$\bar{\varphi}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \varphi_{xx}(t,\tau)\,dt$$

$$= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{ii}(\lambda)\frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2} g(t-lT-\lambda T)\cdot g(t-lT+\tau)\,dt$$

$$= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{ii}(\lambda)\frac{1}{T}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\int_{-T/2-lT}^{T/2-lT} g(t-\lambda T)\,g(t+\tau)\,dt$$

$$= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{ii}(\lambda)\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\lambda T)\,g(t+\tau)\,dt$$

$$= \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{ii}(\lambda)\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,g(t+\tau+\lambda T)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{ii}(\lambda)\,\varphi_{gg}^{E}(\tau+\lambda T),$$

Spektrum eines Datensignals (Fortsetzung)

$$\bar{\varphi}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{ii}(\lambda)\,\varphi_{gg}^{E}(\tau+\lambda T),$$

dabei ist $\varphi_{gg}^{E}(\tau)$ die Energie-AKF des Sendeimpulses *g(t)*.Die mittlere spektrale Leistungsdichte ergibt sich mittels Fouriertransformation zu

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{T}\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{ii}(\lambda)\,S_{gg}^{E}(f)\,e^{j2\pi f\lambda T}$$

$$= \frac{1}{T}\left|G(f)\right|^2 \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{ii}(\lambda)\,e^{j2\pi f\lambda T}$$

Aus $\varphi_{ii}(\lambda) = \varphi_{ii}(-\lambda)$ folgt

$$\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{ii}(\lambda)\,e^{j2\pi f\lambda T} = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \varphi_{ii}(\lambda)\,e^{-j2\pi f\lambda T} = S_{ii}(f)$$

und somit $$S_{xx}(f) = \frac{1}{T}\left|G(f)\right|^2 \cdot S_{ii}(f).$$

Spektrum eines Datensignals (Fortsetzung)

Beispiel:

Die Datenwerte I_j und I_k seien unkorreliert für $j \neq k$:

$$\varphi_i(\lambda) = \sigma_i^2 \delta(\lambda)$$

wobei σ_i^2 die Varianz der Datenwerte I_n ist.

Dann gilt

$$S_{ii}(f) = \sigma_i^2$$

und das Spektrum des Datensignals ergibt sich zu

$$S_{xx}(f) = \frac{\sigma_i^2}{T} |G(f)|^2$$

Zeitdauer – Bandbreite Produkt

Zeitdauer-Bandbreite-Produkt

Gesucht:

Zusammenhang zwischen der Bandbreite eines Modulations-impulses und der Dauer seiner Impulsantwort.

Vorüberlegung:

Signale endlicher zeitlicher Ausdehnung besitzen ein unendlich ausgedehntes Spektrum und umgekehrt.

⟶ Suche geeignete Definition für Zeitdauer und Bandbreite eines Signals.

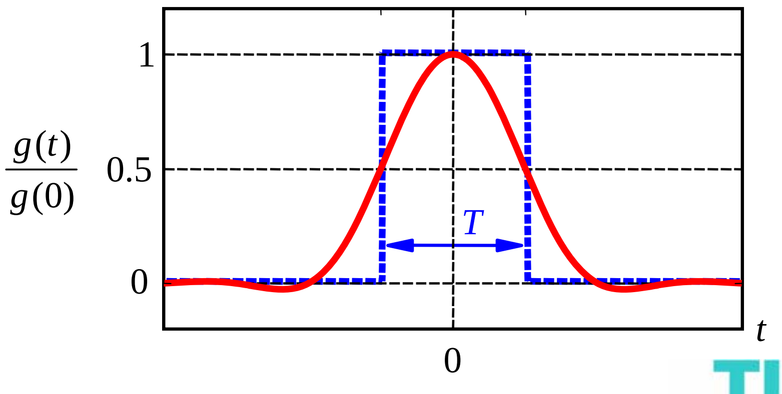
Zeitdauer-Bandbreite-Produkt (Fortsetzung)

Definition 1:

Betrachte den Sonderfall $g(t) = g(-t)$ reell, $\max_t \{g(t)\} = g(0)$

Die Zeitdauer T wird definiert als die Breite eines Rechteckimpulses der Höhe $g(0)$, dessen Fläche dem Integral über $g(t)$ entspricht:

$$T = \frac{1}{g(0)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt$$

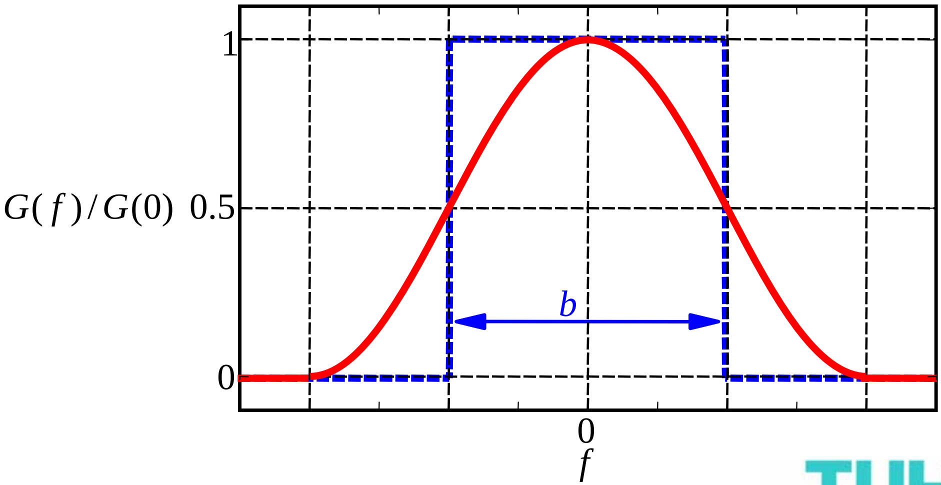


Zeitdauer-Bandbreite-Produkt (Fortsetzung)

Definition 1: (Fortsetzung)

Entsprechend wird die Bandbreite definiert zu

$$b = \frac{1}{G(0)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\,df$$



Zeitdauer-Bandbreite-Produkt (Fortsetzung)

Definition 1: (Fortsetzung)

Aus den Definitionen

$$T = \frac{1}{g(o)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt \qquad \text{und} \qquad b = \frac{1}{G(0)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\,df$$

folgt mit den Zusammenhängen

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = G(0) \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\,df = g(0)$$

die Beziehung $\boxed{b \cdot T = 1}$

→ Das Produkt aus Zeitdauer und Bandbreite
(im Sinne von Definition 1) ist eine Konstante!
(„Unschärferelation der Nachrichtentechnik“)

Zeitdauer-Bandbreite-Produkt (Fortsetzung)

Definition 2: (allgemeiner)

g(t) sei derart normiert, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)\,dt = 1,$$

die zeitliche Lage sei so gewählt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} t g^2(t)\,dt = 0.$$

Zeitdauer und Bandbreite können dann definiert werden als:

$$T = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |g(t)|^2\,dt}$$

$$b = \sqrt{2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |G(f)|^2 df}$$

Zeitdauer-Bandbreite-Produkt (Fortsetzung)

Definition 2: (Fortsetzung)

Gemäß der Definition gilt für das Zeit-Bandbreite-Produkt:

$$b \cdot T \geq \sqrt{\frac{1}{8\pi}}$$

Das Gleichheitszeichen in dieser Beziehung gilt, wenn *g(t)* ein Gaußimpuls der Form

$$g(t) = \sqrt[4]{\frac{2\alpha}{\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-\alpha t^2}{2}\right)$$

ist. Derartige Impulse weisen somit ein gemäß Definition 2 *minimales Zeit-Bandbreite-Produkt* auf.

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit

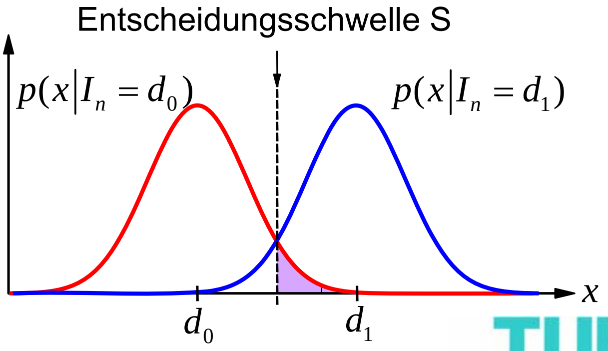
Betrachte zweistufige Übertragung mit $I_n \in \{d_0, d_1\}$ und additiv überlagertem Rauschen *r(t)* mit der VDF $p_r(t)$.

Für das Empfangssignal im Abtastzeitpunkt können die bedingten Verteilungsdichtefunktionen

$$p_0(x) = p(x | I_n = d_0) = p_r(x - d_0)$$

$$p_1(x) = p(x | I_i = d_1) = p_r(x - d_1)$$

angesetzt werden.



Bitfehler-Wahrscheinlichkeit (Fortsetzung)

Frage:

Wie ist die Entscheiderschwelle S zu wählen, damit die Bitfehler-wahrscheinlichkeit minimal wird?

Betrachte die bedingten Fehlerwahrscheinlichkeiten

$$Q_0 = P\left(1 \middle| I_n = d_0\right) = \int_S^\infty p_0(x)\,dx$$

$$Q_1 = P\left(0 \middle| I_n = d_1\right) = \int_{-\infty}^S p_1(x)\,dx$$

Mit den A-priori-Wahrscheinlichkeiten

$$P_0 = P(I_n = d_0), P_1 = P(I_n = d_1)$$

beträgt die Bitfehlerwahrscheinlichkeit

$$P_b = P_0 \cdot Q_0 + P_1 \cdot Q_1 = P_0 \int_S^\infty p_0(x)\,dx + P_1 \int_{-\infty}^S p_1(x)\,dx$$

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit (Fortsetzung)

$$P_b = P_0 \int_S^\infty p_0(x)\,dx + P_1 \int_{-\infty}^S p_1(x)\,dx$$

Mit der Beziehung

$$\int_S^\infty p_0(x)\,dx = 1 - \int_{-\infty}^S p_0(x)\,dx$$

folgt

$$P_b = P_0 + \int_{-\infty}^S \left(P_1 p_1(x) - P_0 p_0(x)\right) dx$$

Optimierung der Entscheiderschwelle zur Minimierung von P_b :

$$\frac{\partial P_b}{\partial S} \overset{!}{=} 0$$

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit (Fortsetzung)

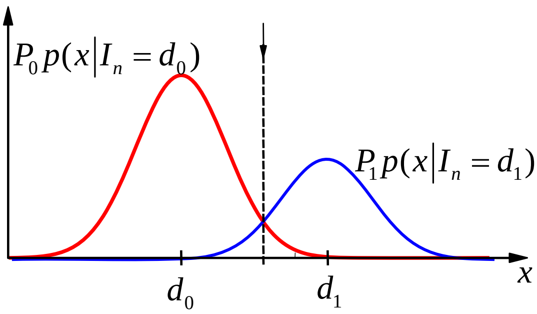
Es gilt:
$$\frac{\partial P_b}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}\left[\int_{-\infty}^{S}\left(P_1 p_1(x) - P_0 p_0(x)\right)dx\right]$$

$$= P_1 p_1(S) - P_0 p_0(S) \overset{!}{=} 0$$

Für die optimale Entscheiderwelle muss also gelten:

$$P_0 p_0(S) = P_1 p_1(S)$$

optimale Entscheidungsschwelle S



Bitfehler-Wahrscheinlichkeit (Fortsetzung)

Berechnung der Bitfehlerwahrscheinlichkeit für den Spezialfall

$$P_0 = P_1 = \frac{1}{2}, \quad p_r(x) = p_r(-x), \quad S = \frac{d_0 + d_1}{2}$$

Es gilt:
$$P_b = P_0 \int_{S}^{\infty} p_0(x)\,dx + P_1 \int_{-\infty}^{S} p_1(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \int_{\frac{d_0+d_1}{2}}^{\infty} p_r(x-d_0)\,dx + \frac{1}{2}\cdot \int_{-\infty}^{\frac{d_0+d_1}{2}} p_r(x-d_1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\int_{\frac{d_1-d_0}{2}}^{\infty} p_r(\xi)\,d\xi + \int_{-\infty}^{\frac{d_0-d_1}{2}} p_r(\xi)\,d\xi\right)$$

$$= \int_{\frac{d_1-d_0}{2}}^{\infty} p_r(\xi)\,d\xi \qquad \text{wg. Symmetrie}$$

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit (Fortsetzung)

$$P_b = \int_{\frac{d_1-d_0}{2}}^{\infty} p_r(\xi)\,d\xi$$

Von hoher praktischer Bedeutung sind insbesondere gaußverteilte Störprozesse:

$$p_r(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_r^2}}$$

mit σ_r^2 als Leistung des Störprozesses.

Für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit gilt

$$P_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r} \int_{\frac{d_1-d_0}{2}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_r^2}}\,d\xi$$

Das auftretende Integral ist nicht geschlossen analytisch lösbar!

Vereinfachung der Darstellung durch Definition der ***Fehlerfunktion*** und der ***komplementären Fehlerfunktion***.

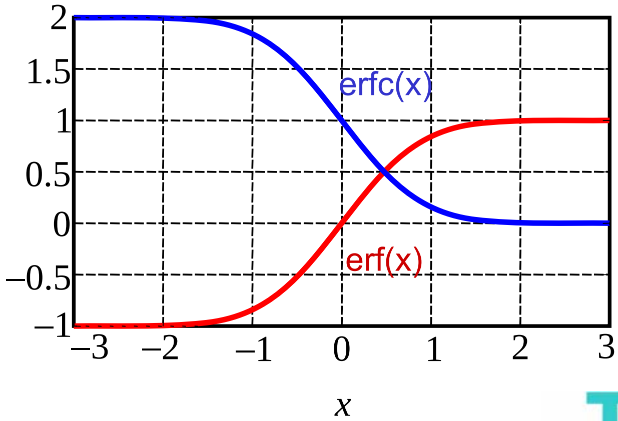
Bitfehler-Wahrscheinlichkeit (Fortsetzung)

Definiere die ***Fehlerfunktion***

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2}\,d\xi$$

und die komplementäre ***Fehlerfunktion***

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi = 1 - erf(x)$$



Bitfehler-Wahrscheinlichkeit (Fortsetzung)

Für die Bitfehler-Wahrscheinlichkeit unter den gegebenen Voraussetzungen gilt:

$$P_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_r} \int_{\frac{d_1-d_0}{2}}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_r^2}} d\xi \qquad = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{d_1-d_0}{2\sqrt{2}\sigma_r}\right)$$

Beispiel 1: bipolare Übertragung

Betrachte den Fall

$$d_0 = -d, d_1 = +d$$

Die Datenleistung des Datensignals ist dann $S=d^2$, somit gilt

$$\frac{d_1-d_0}{2\sqrt{2}\sigma_r} = \frac{d}{\sqrt{2}\sigma_r} = \sqrt{\frac{S}{2N}}$$

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit (Fortsetzung)

Beispiel 1: (Fortsetzung) bipolare Übertragung

Die Leistung des Datensignals ist $S=d^2$, somit gilt

$$\frac{d_1-d_0}{2\sqrt{2}\sigma_r} = \frac{d}{\sqrt{2}\sigma_r} = \sqrt{\frac{S}{2N}}$$

Bei Matched-Filterung gilt weiterhin $\frac{S}{N} = \frac{E_b}{N_0}$,

somit folgt $P_b = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{d_1-d_0}{2\sqrt{2}\sigma_r}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$

Beispiel 2: unipolare Übertragung

Betrachte Übertragung mit $d_0 = 0, d_1 = d$

Die mittlere Signalleistung beträgt dann $S=d^2/2$.

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit (Fortsetzung)

Beispiel 2: (Fortsetzung) unipolare Übertragung

Mit $S=d^2/2$ gilt
$$\frac{d_1-d_0}{2\sqrt{2}\sigma_r}=\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma_r}=\sqrt{\frac{S}{4N}}$$

Bei Matched-Filterung gilt wiederum $\frac{S}{N}=\frac{E_b}{N_0}$

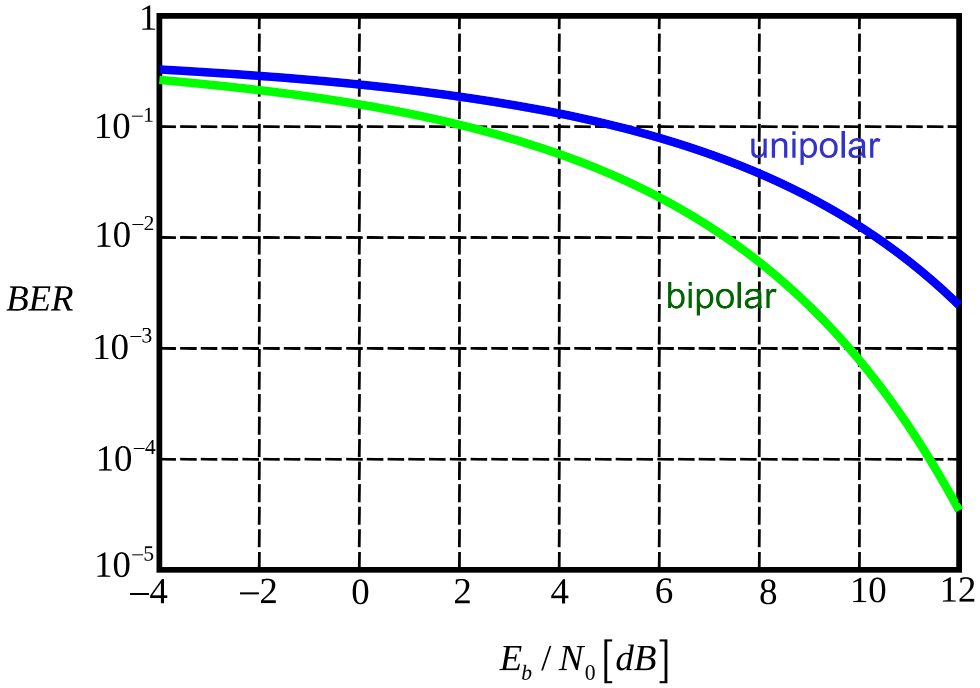
Die Symbolenergie hängt vom gesendeten Zeichen ab:

$$E_{b0}=0,\quad E_{b1}=d^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}g^2(\tau)\,d\tau$$

Mit der *mittleren* Energie pro Bit $\bar{E}_b=E_{b1}/2$ ergibt sich für die Bitfehlerwahrscheinlichkeit

$$P_b=\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{\bar{E}_b}{4N_0}}\right)$$

Bitfehler-Wahrscheinlichkeit (Fortsetzung)



Partial-Response-Codierung

Partial-Response-Codierung

Motivation:

Bei gegebener Grenzfrequenz f_g des Kanals ist es schwer, ein Pulsformfilter zu konstruieren, das Datenübertragung mit der Nyquistrate $R = \frac{1}{T} = 2\,f_g$ ermöglicht. (Nur mit si-Puls möglich, mit den bekannten Nachteilen: siehe Kapitel über Pulsformung)

Würden die Sendepulse aber gezielt verlängert, könnte die Breite des Signalspektrums so verringert werden, dass bei gegebener Grenzfrequenz die Nyquistrate erreicht wird.
Dies bedeutet aber, ISI in Kauf zu nehmen. Diese künstlich erzeugte ISI muss später im Empfänger berücksichtigt werden.

Partial-Response-Codierung

Realisierungsmöglichkeit:

Intersymbolinterferenz (und damit Pulsverlängerung) wird durch zusätzliche Filter gezielt eingeführt.

→ *Partial-Response-Codes (Pseudo-Mehrstufencodes, korrelative Codierung)*

Bisheriges Sendesignal (ohne ISI):

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \underbrace{g(t-nT)}_{\text{Sendepuls (z.B. si)}} \quad \text{mit } I_n \in \{-1,1\}$$

Erzeuge ISI durch Abhängigkeit eines Sendepulses von mehreren

(hier: zwei) Datensymbolen I_n:

<u>**Beispiel:**</u> $$s_{ISI}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n - I_{n-2}] \cdot g(t-nT)$$

Partial-Response-Codierung (Fortsetzung)

Ausdruck der Abhängigkeit durch Codiervorschrift:

$$s_{ISI}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{[I_n - I_{n-2}]}_{c_n} \cdot g(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot g(t-nT)$$

$$\text{mit} \quad c_n = \sum_{v=0}^{k-1} \alpha_v I_{n-v}$$

→ Abbildung der Symbolfolge $I_n \in \{-1,1\}$ auf die Sendefolge c_n

Unser Beispiel: „Klasse 4-Code" mit $k = 3,\ \alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -1$

Bitfolge	...	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	...	...	...
$\alpha_0 I_n$	...	-1	-1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	+1	-1	...	...	...
$\alpha_1 I_{n-1}$	...	...	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	...
$\alpha_2 I_{n-2}$	...	...	...	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	...
c_n	...	...	...	+2	+2	0	0	0	0	0	-2	0	0	...	...	...

Partial-Response-Codierung (Fortsetzung)

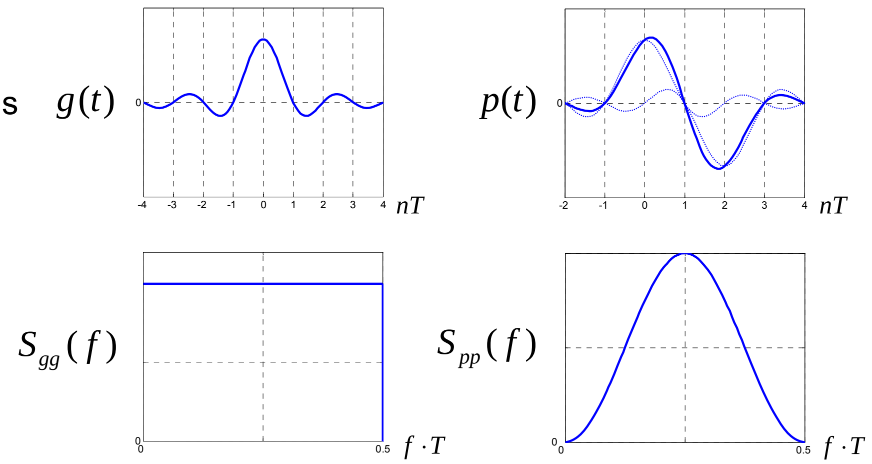
Alternative Sichtweise:

$$s_{ISI}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n - I_{n-2}] \cdot g(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n \cdot \underbrace{\left[g(t-nT) - g(t-(n+2)T)\right]}_{p(t-nT)}$$

Abhängigkeit der Datensymbole erzeugt neue Sendepulsform $p(t)$,

mit neuen ISI- und Spektraleigenschaften:

si-Puls



Unser Beispiel

(„Klasse 4“)

Partial-Response-Codierung (Fortsetzung)

Spektrale Eigenschaften:

Infolge der kontrollierten Intersymbol-Interferenz sind die

Sendesymbole c_n korreliert:

$$\varphi_{cc}(\lambda) = E\{c_n c_{n+\lambda}\} \quad = \sum_{v=0}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{k-1} \alpha_v \alpha_\mu E\{I_{n-v} \cdot I_{n+\lambda-\mu}\}$$

Für unkorrelierte und mittelwertfreie Daten I_n gilt

$$\varphi_{cc}(\lambda) = \sigma_i^2 \sum_{v=0}^{k-1} \alpha_v \alpha_{v+\lambda}$$

Für das Sendesignal gilt: $\quad x(t) = \sum_n c_n g(t-nT)$

Partial-Response-Codierung (Fortsetzung)

Spektrale Eigenschaften: (Fortsetzung)

Für das Sendesignal gilt: $x(t) = \sum_n c_n g(t - nT)$

Mit $c(t) = \sum_n c_n \delta(t - nT)$ folgt:

$$x(t) = \sum_n c_n \delta(t - nT) \quad * \quad g(t)$$

$$\overset{Wiener-Lee}{\Rightarrow} \quad \varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{cc}(\tau) * \varphi_{gg}^{E}(\tau)$$

$$\Rightarrow S_{xx}(f) = S_{cc}(f) \cdot |G(f)|^2$$

Partial-Response-Codierung (Fortsetzung)

Spektrale Eigenschaften: (Fortsetzung)

$$S_{xcxc}(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \sum_{\lambda=-(k-1)}^{k-1} \varphi_{cc}(\lambda) e^{-j2\pi fT\lambda}$$

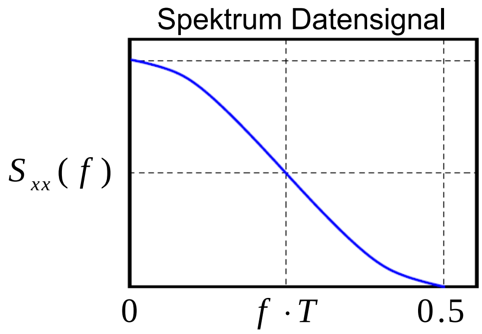
$$= \frac{\sigma_i^2}{T} |G(f)|^2 \sum_{\lambda=-(k-1)}^{k-1} \left(e^{j2\pi fT\lambda} \sum_{v=0}^{k-1} \alpha_v \alpha_{v+\lambda} \right)$$

$$\boxed{= \frac{\sigma_i^2}{T} |G(f)|^2 \left(\sum_{v=0}^{k-1} \alpha_v^2 + 2 \sum_{\lambda=1}^{k-1} \left(\cos(2\pi fT\lambda) \cdot \sum_{v=0}^{k-1} \alpha_v \alpha_{v+\lambda} \right) \right)}$$

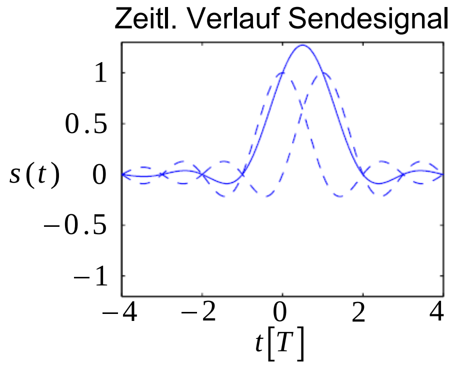
Beispiele für Partial Response-Codes

Duobinärcode: $\alpha_v = \{1,1\}$ si-förmige Sendepulse

Spektrum Datensignal

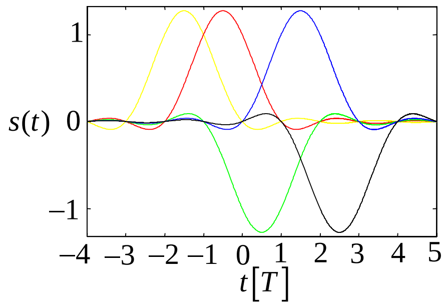


Zeitl. Verlauf Sendesignal



Beispiel für Sendefolge

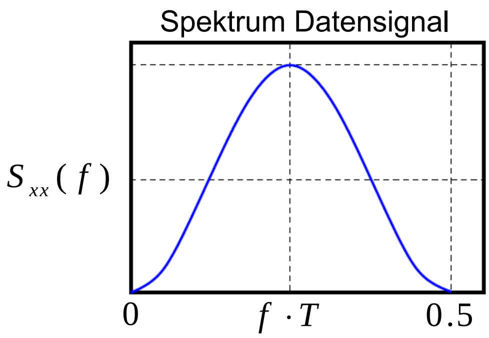
Bitfolge: 11010, $I_n \in \{1,-1\}$



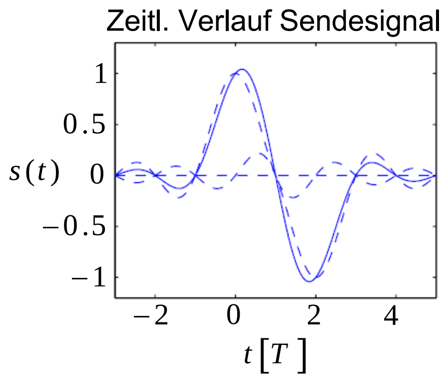
Beispiele für Partial Response-Codes

Klasse 4-Code: $\alpha_v = \{1,0,-1\}$ si-förmige Sendepulse

Spektrum Datensignal

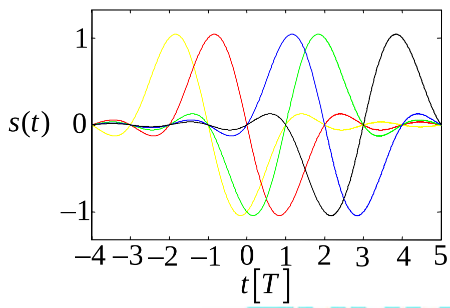


Zeitl. Verlauf Sendesignal



Beispiel für Sendefolge

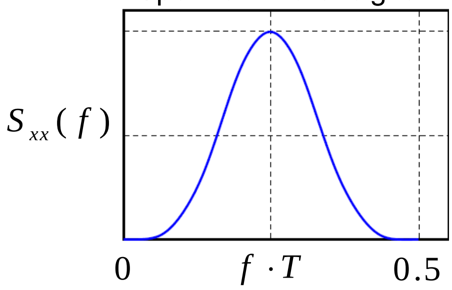
Bitfolge: 11010, $I_n \in \{1,-1\}$



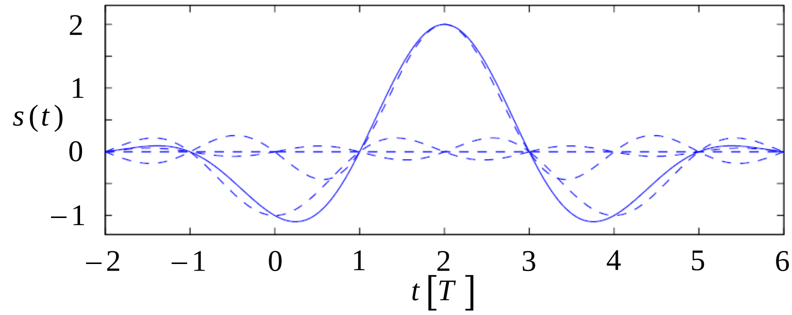
Beispiele für Partial Response-Codes

Klasse 5-Code: $\alpha_v = \{-1, 0, 2, 0, -1\}$ si-förmige Sendepulse

Spektrum Datensignal

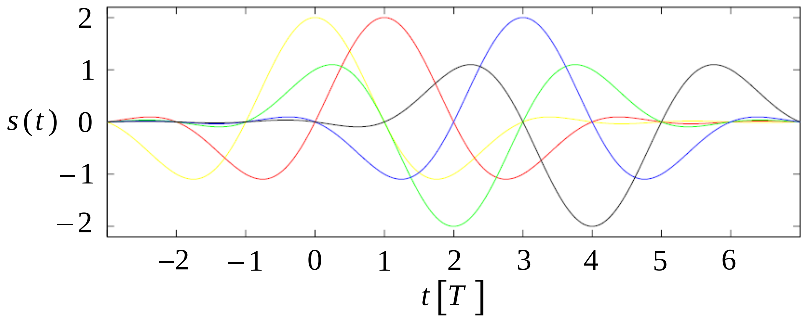


Zeitl. Verlauf Sendesignal



Beispiel für Sendefolge

Bitfolge: 11010, $I_n \in \{1, -1\}$



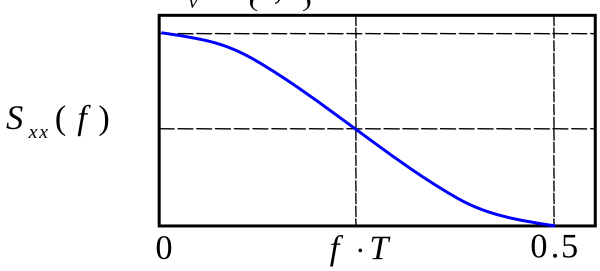
Partial-Response-Codierung (Fortsetzung)

Vergleich der Spektralen Eigenschaften:

Spektren der Datensignale für verschiedene PR-Codes (si-förmige Sendeimpulse):

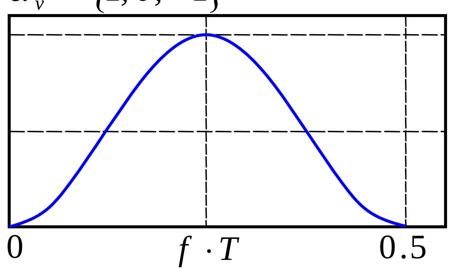
Duobinärcode

$\alpha_v = \{1, 1\}$



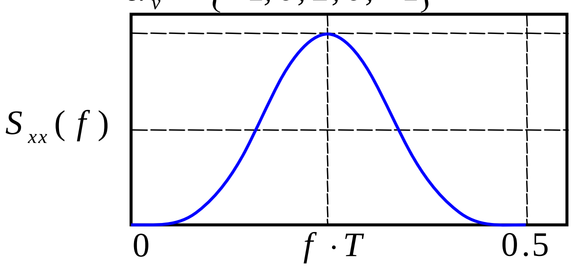
Klasse 4

$\alpha_v = \{1, 0, -1\}$



Klasse 5

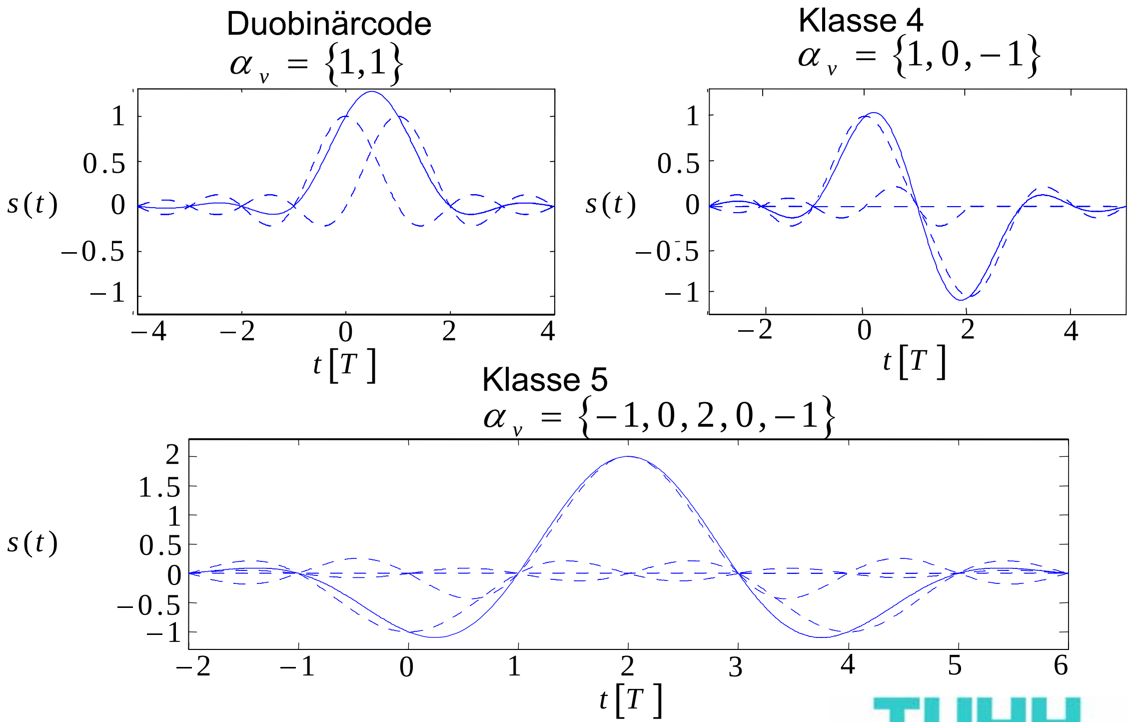
$\alpha_v = \{-1, 0, 2, 0, -1\}$



Partial-Response-Codierung (Fortsetzung)

Vergleich der zeitlichen Verläufe:

Verschiedene PR-Codes (si-förmigeSendeimpulse):



Partial-Response-Codierung (Fortsetzung)

Frage: Wie wirken sich Abtastabweichungen bei PR-codierter Übertragung mit si-förmigen Sendeimpulsen aus?

Beispiel: Klasse-4-Code, $\{\alpha_\nu\} = \{1, 0, -1\}$

Das Datensignal ergibt sich zu

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (I_{n-1} - I_{n+1}) \cdot g(t - nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_n \cdot \Big(g\big(t - (k-1)T\big) - g\big(t - (k+1)T\big)\Big)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_n \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\big(t-(k-1)T\big)\right)}{\frac{\pi}{T}\big(t-(k-1)T\big)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}\big(t-(k+1)T\big)\right)}{\frac{\pi}{T}\big(t-(k+1)T\big)} \right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_n \frac{2\sin\big(\pi(t-T)/T\big)}{\pi\left(\left(\frac{t-nT}{T}\right)^2 - 1\right)}$$

<u>Beispiel:</u> Klasse-4-Code (Fortsetzung)

Datensignal:

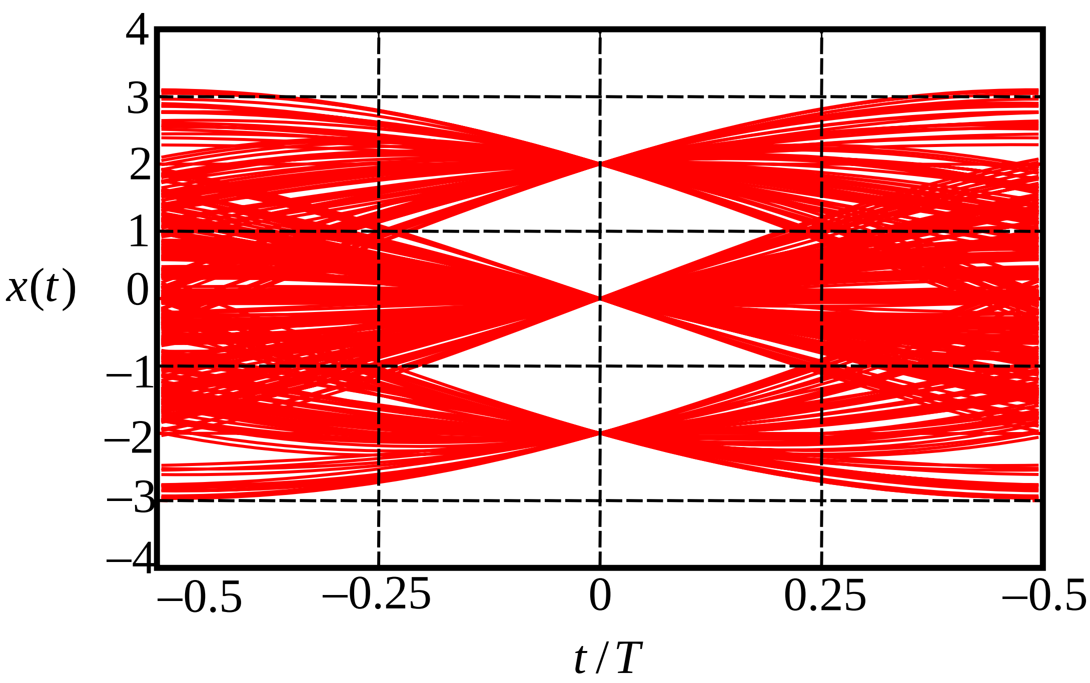
$$x_c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_n \frac{2\sin\left(\pi(t-T)/T\right)}{\pi\left(\left(\frac{t-nT}{T}\right)^2 - 1\right)}$$

Für Datensymbole $I_n \in \{-d, d\}$ ergibt sich bei einer Abtast-Abweichung von $\Delta t \ll T$ der maximal mögliche vertikale Augenfehler näherungsweise zu

$$F = \max\{\Delta c_n\} \approx d \cdot 5 \frac{\Delta t}{T}$$

$\longrightarrow$ Für geringe Fehlabtastung ist trotz der si-förmigen Sendeimpulse eine eindeutige Symbolentscheidung möglich, d.h. es existiert eine von Null verschiedene horizontale Augenöffnung, anders als bei reinen si-förmigen Sendeimpulsen, siehe Folie 16 in diesem Kapitel.

Augendiagramm für Klasse-4-Code; si-förmige Sendeimpulse



Partial-Response-Decodierung

Decodierung im Empfänger:

Die *Decodiervorschrift* von PR-Codes ist rekursiv.

Ausgehend von Codiervorschrift:

$$c_n = \sum_{v=0}^{k-1} \alpha_v I_{n-v} = \alpha_0 I_n + \sum_{v=1}^{k-1} \alpha_v I_{n-v}$$

Nach I_n auflösen:

$$I_n = \frac{c_n}{\alpha_0} - \sum_{v=1}^{k-1} \frac{\alpha_v}{\alpha_0} I_{n-v}$$

Im Empfänger sind nur potentiell fehlerbehaftete Versionen von c_n und I_n bekannt:

$$\boxed{\hat{I}_n = \frac{\hat{c}_n}{\alpha_0} - \sum_{v=1}^{k-1} \frac{\alpha_v}{\alpha_0} \hat{I}_{n-v}}$$

Decodiervorschrift

Partial-Response-Decodierung

Beispiel: Decodierung für „Klasse 4“, $I_n \in \{-1, 1\}$ $\alpha_v = \{1, 0, -1\}$

Decodiervorschrift: $$\hat{I}_n = \frac{\hat{c}_n}{\alpha_0} - \sum_{v=1}^{k-1} \frac{\alpha_v}{\alpha_0} \hat{I}_{n-v}$$

$$\Rightarrow \hat{I}_n = \hat{c}_n + \hat{I}_{n-2} \quad \text{(für Klasse 4)}$$

Sende- und Empfangsfolgen mit einem Fehler in Empfangsfolge:

Sendesymbole I_n	...	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	...
Sendefolge c_n	...	...	...	+2	+2	0	0	0	0	0	-2	0	0	...
Empfangsfolge $\hat{c}_n$	...	...	...	+2	+2	$\boxed{-2}$	0	0	0	0	-2	0	0	...
Empfangene Sym. $\hat{I}_n$	...	(-1)	(-1)	1	1	$\boxed{-1}$	1	$\boxed{-1}$	1	$\boxed{-1}$	-1	$\boxed{-1}$	-1	...

→ Fehler in der Empfangsfolge $\hat{c}_n$ führen zu *Fehlerfortpflanzung* bei der Symbolfolge $\hat{I}_n$!!

Partial-Response-Vorcodierung

Wie kann Fehlerfortpflanzung im Empfänger vermieden werden?

Abhilfe:

Geeignete ***Vorcodierung*** der Binärdaten, so dass die Decodierung insgesamt ohne Verwendung von vorangegangenen Entscheidungen möglich ist.

Geeignete Codierungsvorschrift:

$$b_n = I_n \oplus (b_{n-1} \cdot \alpha_1') \oplus \left(b_{n-2} \cdot \alpha_2'\right) \oplus \ldots \oplus \left(b_{n-m+1} \cdot \alpha_{m-1}'\right)$$

mit $I_n, b_n \in \{0,1\}$ und

$$\alpha_v' = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha_v \text{ gerade} \\ 1 & \text{für } \alpha_v \text{ ungerade} \end{cases}$$

Partial-Response-Vorcodierung (Fortsetzung)

Beispiel: $\{\alpha_v\} = \{1, 0, -1\}, \quad \alpha_0' = \alpha_2' = 1, \; \alpha_1' = 0$

Vorcodierung: $b_n = I_n \oplus b_{n-2} \in \{0,1\}$

PR-Codierung: $c_n = b_n - b_{n-2} \in \{-1, 0, 1\}$

Fallunterscheidung:

Fall 1: $c_n = 0 \Leftrightarrow b_n = b_{n-2}$

$\Leftrightarrow I_n = 0$

Fall 2: $c_n \neq 0 \Leftrightarrow b_n \neq b_{n-2}$

$\Leftrightarrow I_n = 1$

Dementsprechend lautet die (nichtrekursive) Gesamt-Decodiervorschrift:

$$|\hat{c}_n| = 1 \rightarrow \hat{I}_n = 1$$

$$|\hat{c}_n| = 0 \rightarrow \hat{I}_n = 0$$

Partial-Response-Vorcodierung (Fortsetzung)

Beispiel für Vorcodierung: (wie auf vorangegangener Folie)

$$\{\alpha_v\} = \{1, 0, -1\}, \quad \alpha'_0 = \alpha'_2 = 1, \ \alpha'_1 = 0$$

Vorcodierung: $b_n = I_n \oplus b_{n-2} \in \{0,1\}$

PR-Codierung: $c_n = b_n - b_{n-2} \in \{-1,0,1\}$

I_n	...	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	...	...	...
b_n	...	(0)	(0)	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	...	...	...
c_n	...	...	...	1	1	-1	-1	1	1	-1	0	1	0	...	...	...

$$|\hat{c}_n| = 1 \rightarrow \hat{I}_n = 1$$

$$|\hat{c}_n| = 0 \rightarrow \hat{I}_n = 0$$

PR-Codierung:Vermeidung konstanter Symbolfolgen

PR-Codes, die die Bedingung

$$\sum_{v=0}^{k-1} \alpha_v e^{j2\pi f v} \Big|_{f=0} = \sum_{v=0}^{k-1} \alpha_v = 0$$

erfüllen,gewährleisten eine gleichanteilfreie Übertragung.

Lange Einser-Sequenzen werden dadurch vermieden.

Aber:

Lange Nullfolgen sind möglich!

$\longrightarrow$ ungünstig für die Rekonstruktion des Symboltaktes.

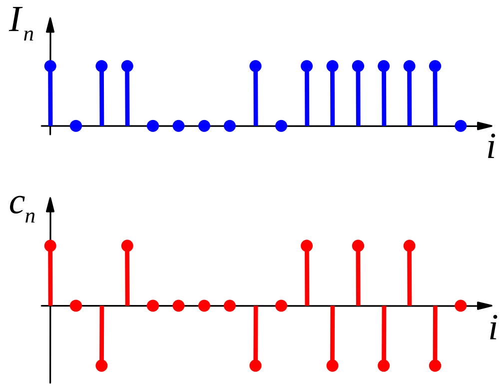
Abhilfe:

Ersetze lange Nullfolgen durch *codeverletzende* Sequenzen. Die Codeverletzung wird im Empfänger erkannt und die entsprechenden Symbole werden wieder durch Null ersetzt.

PR-Codierung:Vermeidung konstanter Symbolfolgen

Beispiel:

Betrachte den ***AMI-Code*** (*Alternate Mark Inversion*) mit $\{\alpha_\nu\} = \{1, -1\}$ und entsprechender Vorcodierung.



Bei jeder übertragenen logischen „1“ kehrt sich das Vorzeichen gegenüber der zuletzt übertragenen „1“ um.

PR-Codierung: Vermeidung konstanter Symbolfolgen

Beispiel: (Fortsetzung)

Aus dem AMI-Code entsteht der ***B6ZS-Code*** (*Bipolar with 6 Zero Sub-stitution*), indem Folgen von jeweils 6 aufeinanderfolgenden Nullen durch

$$\{0, +1, -1, 0, -1, +1\} \quad \text{bzw.} \quad \{0, -1, +1, 0, +1, -1\}$$

ersetzt werden.

Das aufeinanderfolgen zweier gleicher Vorzeichen verletzt den AMI-Code. Die ursprünglichen Positionen der Nullsequenzen können somit detektiert werden.

Anwendung: z.B. auf dem S_0-Bus zwischen ISDN-Telefon und NTBA

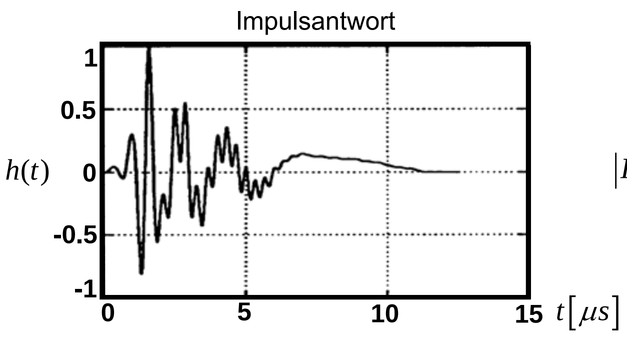
Fehlereinflüsse in digitaler Basisbandübertragung

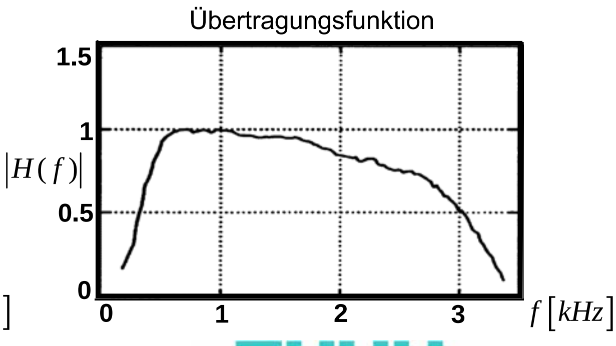
Fehlereinflüsse in digitaler Basisbandübertragung

- Additiv überlagertes Rauschen
- Quantisierungsrauschen
- Intersymbolinterferenzen
- lineare Verzerrungen
- nichtlineare Verzerrungen

Lineare Verzerrungen durch den Übertragungskanal werden durch Impulsantwort $h(t)$ bzw. Übertragungsfunktion $H(f)$ eines LTI-Systems beschrieben.

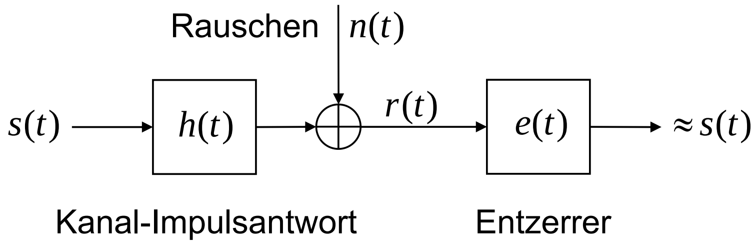
Beispiel: analoger Fernsprechkanal





Lineare Verzerrungen

Kompensation der linearen Kanalverzerrungen durch Entzerrer:



$$h(t) \; * \; e(t) \; \approx \; \delta(t)$$

$$H(f) \cdot E(f) \; \approx \; 1$$

$$E(f) = \frac{1}{H(f)}$$

(Zero-Forcing-Entzerrer)

Symboltakt-Synchronisation

Die frequenz- und phasenneutrale Rückgewinnung des Symboltaktes im Empfänger ist die Voraussetzung für eine verlässliche Detektion.

Aber:

Im Spektrum des Empfangssignals ist die Taktfrequenz i.d.R. nicht unmittelbar enthalten.

Beispiel:

Übertragung mit Cosinus-Roll-Off-Impulsen: Der Symboltakt beträgt $1/T$, das Spektrum des Empfangssignals ist jedoch bandbegrenzt auf das Intervall

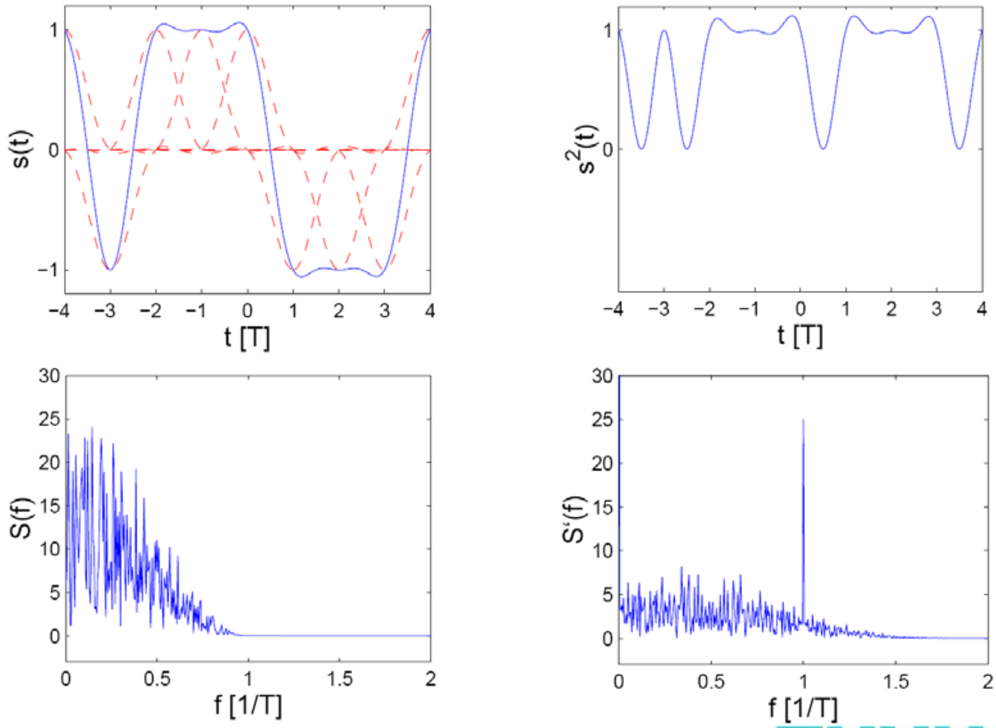
$$\left[-\frac{1+r}{2T}, \frac{1+r}{2T}\right]$$

Aufgabe:

Erzeuge aus dem Empfangssignal ein Signal, das ausgeprägte Spektrallinien bei $\pm 1/T$ enthält.

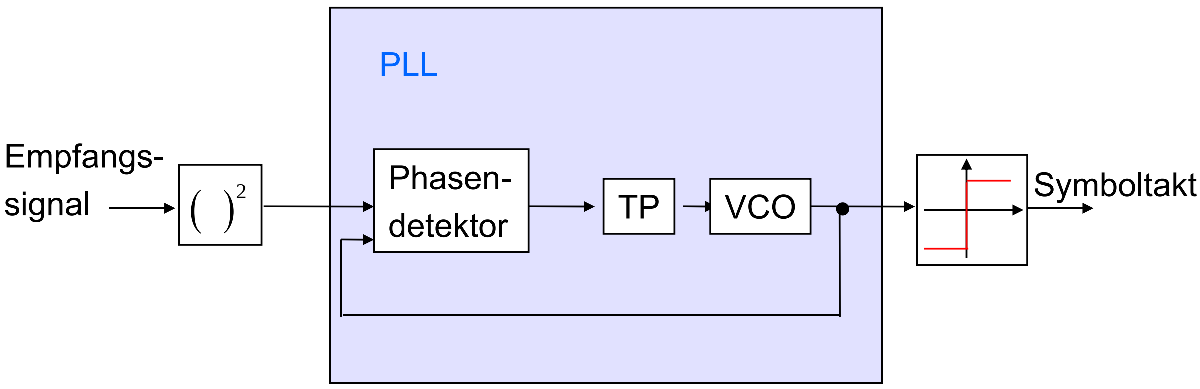
Symboltakt-Synchronisation (Fortsetzung)

Lösung: Nichtlineare Verzerrung des Empfangssignals durch *Quadrierung*



Symboltakt-Synchronisation (Fortsetzung)

Rückgewinnung des Symboltaktes aus dem nichtlinear verzerrten Empfangssignal mittels Bandpassfilterung unter Verwendung eines ***Phasenregelkreises (Phase Locked Loop, PLL)***



TP: Tiefpass; VCO: Voltage Controlled Oscillator

Symboltakt-Synchronisation (Fortsetzung)

alternativer Ansatz: *entscheidungsrückgekoppelte Taktregelung*

Vorausgesetzt wird eine leistungsfähige Entzerrung.

Ziel: Synchronisation auf Nullstellen vor und nach dem Empfangspuls

Die Größe

$$\Theta = E\left\{x\left((n-1)T\right)\hat{I}_n - x(nT)\hat{I}_{n-1}\right\}$$

Kann daher als Maß für die vorliegende Abtast-Abweichung Δt

betrachtet werden.

Es gilt: $$x(nT) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l g(nT + \Delta t - lT)$$

Einsetzen und Umformen liefert

$$\Theta = \sum_{l=-\infty}^{\infty} E\{I_n I_l\} \cdot g\left((n-1)T + \Delta t - lT\right) - \sum_{l=-\infty}^{\infty} E\{I_{n-1} I_l\} \cdot g(nT + \Delta t - lT)$$

Symboltakt-Synchronisation (Fortsetzung)

entscheidungsrückgekoppelte Taktregelung: (Fortsetzung)

$$\Theta = \sum_{l=-\infty}^{\infty} E\{I_n I_l\} \cdot g\left((n-1)T + \Delta t - lT\right) - \sum_{l=-\infty}^{\infty} E\{I_{n-1} I_l\} \cdot g(nT + \Delta t - lT)$$

Für unkorrelierte und mittelwertfreie I_n gilt:

$$E\{I_n I_l\} = \begin{cases} \sigma_i^2 & \text{für } n=l \\ o & \text{sonst} \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\Theta = \sigma_i^2 \left(g(-T + \Delta t) - g(T + \Delta t)\right)$$

Für $\Delta t \ll T$ gilt näherungsweise

$$g(\pm T + \Delta t) \approx \dot{g}(\pm T) \cdot \Delta t$$

und somit

$$\Theta = \sigma_i^2 \left(\dot{g}(-T) - \dot{g}(T)\right) \cdot \Delta t$$

entscheidungsrückgekoppelte Taktregelung: (Fortsetzung)

In der Praxis kann

$$\Theta = E\left\{x\left((n-1)T\right)\hat{I}_n - x\left(nT\right)\hat{I}_{n-1}\right\}$$

nur geschätzt werden.

Blockschaltbild: