## Satzsemantik

- Gundsätzlich: Es existiert ein enger Zusammenhang zwischen der Bedeutung von (Aussage) Sätzen und den Bedingungen, unter denen sie wahr oder falsch sind (sog. Wahrheitsbedingungen). Dies kann durch die folgenden Prinzipien genauer bestimmt werden:

(46) *1. Satzsemantisches Prinzip*
Wenn A und B Sätze sind, und A ist wahr und B ist falsch, dann bedeuten A und B nicht dasselbe.

(47) *2. Satzsemantisches Prinzip*
Angenommen eine Person kennt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Wahrheit bzw. Falschheit eines Satzes. Dann kennt diese Person auch die Bedeutung des betreffenden Satzes.

(48) *3. Satzsemantisches Prinzip*
Falls eine Person die Bedeutung eines Satzes kennt, dann sind dieser Person auch notwendige und hinreichende Bedingungen für Wahrheit bzw. Falschheit des Satzes bekannt.

- Mit anderen Worten: die Kenntnis von der Bedeutung eines Satzes ist gleichwertig mit dem Wissen, unter welchen Bedingungen dieser Satz wahr ist.
- Unterschied zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Wahrheit/Falschheit eines Satzes:

(49) Es regnet und es blitzt.

- Eine notwendige Bedingung für die Wahrheit dieses Satzes ist, dass es tatsächlich regnet. Diese Tatsache ist allerdings nicht hinreichend dafür, dass der Satz eine wahre Aussage ist (sie ist allerdings die hinreichende Bedingung für die Wahrheit von *Es regnet*). Darüber hinaus muss für die Wahrheit des Satzes die Welt so beschaffen sein, dass es auch tatsächlich blitzt.
- Wichtig: Unterscheidung zwischen *Wahrheitsbedingungen* und der *Wahrheit* bzw. *Falschheit* eines Satzes. Man kann nämlich sehr wohl die Wahrheitsbedingungen für einen Satz angeben, ohne zu wissen, ob er wahr oder falsch ist.

(50) Peter schläft und Maria arbeitet.

- Auch dieser Satz ist genau dann wahr, wenn beide Teilsätze des komplexen Satzes wahr sind, d.h. wenn die Welt so beschaffen ist, dass Peter schläft und Maria arbeitet.
- Über dieses Wissen verfügen wir unabhängig davon, ob dieser Satz tatsächlich den Gegebenheiten in der Welt entspricht. Mit anderen Worten: Selbst wenn wir nicht wissen, ob dieser Satz wahr oder falsch ist (d.h. ob Peter tatsächlich schläft und Maria arbeitet), wissen wir trotzdem, was er bedeutet, weil wir die Bedingungen kennen, die diesen Satz wahr oder falsch machen.
- In der formalen Semantik geht es nun in erster Linie darum, die Wahrheitsbedingungen (der wörtlichen Bedeutung) von Sätzen korrekt zu erfassen (d.h., zu beschreiben, was in der Welt der Fall sein muss, damit ein Satz wahr ist).
- Ein weiteres zentrales Prinzip der Satzsemantik ist das sog. Frege- oder Kompositionalitätsprinzip:

(51) *Fregeprinzip*

Die Bedeutung eines Satzes (= seine Wahrheitsbedingungen) lässt sich aus den Bedeutungen seiner Teilausdrücke ermitteln.

- Ähnliches haben wir bereits im Rahmen der Komponentenanalyse von Sätzen gesehen. Dabei wurde die Bedeutung eines Satzes allerdings nicht in Form von Wahrheitsbedingungen, sondern als Bündel semantischer Merkmale angegeben.
- Somit lassen sich die Grundannahmen der Satzsemantik wie folgt zusammenfassen:

(52) a. Für jeden (Aussage-) Satz bestimmt die Semantik die Wahrheitsbedingungen.
b. Es gilt das Fregeprinzip.

- Eine Semantik, die auf diesen Annahmen aufbaut, nennt man auch <u>modelltheoretische Semantik</u>.

## 1 Aussagenlogik

- <u>Voraussetzung</u>: Kenntnis der Wahrheitsbedingungen eines Satzes entspricht der Kenntnis seiner Bedeutung.
- <u>Beobachtung</u>: es gibt Elemente, die die Wahrheitsbedingungen von Sätzen auf systematische Art und Weise verändern, unabhängig davon, was die einzelnen Sätze bedeuten. Beispiel

(53) Peter schläft und Maria arbeitet.

- Wie bereits erwähnt, ist dieser Satz genau dann wahr, wenn beide Teilsätze des komplexen Satzes wahr sind (d.h., relativ zu den Gegebenheiten in der realen Welt als ‚wahr' beurteilt werden). Ansonsten ist der Satz falsch.
- Mit anderen Worten, unabhängig davon, ob wir wissen, wie es um die Wahrheit/Falschheit der Teilsätze bestellt ist, können wir beobachten, dass die Konjunktion *und* die Wahrheitsbedingungen der mit ihrer Hilfe verknüpften Sätze systematisch verändert. Elemente mit solchen Eigenschaften (wie *und*) nennt man auch <u>logische Junktoren</u>.
- Wie kann man nun darstellen, auf welche Weise logische Junktoren die Wahrheitsbedingungen der mit ihnen verknüpfen Teilsätze beeinflussen?
- Gängigerweise verwendet man hierzu eine tabellenartige Darstellung im Rahmen sog. <u>Wahrheitstafeln</u>.
- Eine Wahrheitstafel listet die möglichen Wahrheitswerte („1“ für „wahr“ und „0“ für „falsch“) für die Teilsätze auf und gibt den Wahrheitswert für den komplexen Satz an, der sich durch die Verknüpfung der Teilsätze mittels des Junktors (hier: *und*) ergibt:

(54) *Konjunktion („und“)*

| 1. Teilsatz | 2. Teilsatz | 1. Teilsatz *und* 2. Teilsatz |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

- Der Junktor „*und*“ wird auch als *Konjunktion* bezeichnet (nicht zu verwechseln mit dem syntaktischen, wesentlich allgemeineren Begriff der Konjunktion).

- Wichtig: Wenn man die Bedeutung/semantischen Werte der Teilsätze kennt, dann kann man auf der Basis dieser Tabelle die Wahrheitsbedingungen (die Bedeutung) des resultierenden Gesamtsatzes ermitteln.
- Statt von logischen Junktoren spricht man hier auch von *Wahrheitswertfunktionen*, da Elemente wie *und* eine Menge von Wahrheitswerten auf einen anderen Wahrheitswert abbilden.
- Die Tabelle in (54) kann auch als eine Beschreibung der Bedeutung von *und* aufgefasst werden.
- Mit dieser Darstellung können auch andere logische Junktoren erfasst werden, die einzelne Sätze zu komplexeren Sätzen verknüpfen und auf systematische Weise die Wahrheitsbedingungen von Sätzen modifizieren: Negation („*es ist nicht der Fall, dass...*"), die sog. *Adjunktion* („*oder*") und die sog. *Implikation* („*wenn ... dann*").
- Unterscheidung zwischen *einstelligen* (Negation; nur ein Teilsatz nötig, um einen komplexeren Ausdruck zu bilden) und *zweistelligen* Junktoren (alle anderen).
- <u>Notation</u>: In den folgenden Wahrheitstafeln wird statt „1. Teilsatz" und „2. Teilsatz" einfach „A" und „B" verwendet. Außerdem werden für die Junktoren die folgenden Abkürzungen verwendet:

(55)

| Junktoren | Abkürzung |
|---|---|
| *und* | $\wedge$ (Konjunktion) |
| *oder* | $\vee$ (Adjunktion) |
| *es ist nicht der Fall, dass* | $\neg$ (Negation) |
| *wenn...dann...* | $\rightarrow$ (Implikation) |

(56) *Negation („es ist nicht der Fall, dass...“)*

| A | ¬A |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 0 | 1 |

(57) *Adjunktion („oder“)*

| A | B | A ∨ B |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

(58) *Implikation („wenn... dann...“)*

| A | B | A → B |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

- Rekursiver Charakter dieser Definitionen: A und B können wiederum beliebig komplexe Sätze sein.
- Beispiel:

(59) Wenn Peter schläft und Maria arbeitet, dann wird niemand dem Postboten die Tür öffnen.

- Dieser komplexe Satz enthält zwei Junktoren.

- FRAGE: Welches ist der übergeordnete Junktor, d.h., nach welcher Wahrheitstafel wird die Bedeutung des Gesamtsatzes ermittelt?
- Der Nachsatz des *wenn-dann* Satzes kann nicht weiter zerlegt werden; der Vordersatz hingegen ist wiederum ein komplexer Satz, der aus zwei Teilsätzen besteht, die mit *und* verknüpft sind. Dessen Wahrheitsbedingungen sind wiederum von der Wahrheitstafel abhängig, die wir für die Konjunktion ermittelt haben (s. (52) oben).
- Ein etwas komplizierteres Beispiel:

(60) $\neg ((A \vee B) \wedge \neg C) \rightarrow (\neg (A \vee B) \vee C)$

- Die Klammern funktionieren hier wie die Klammern in einer mathematischen Formel, d.h., sie geben den „Bereich“ eines bestimmten Junktoren an. Wie in der Mathematik wird von „innen nach außen“ gerechnet, d.h. man ermittelt zunächst die Wahrheitswertverteilungen in den geklammerten Ausdrücken, bevor man die Werte für den übergeordneten Junktor (und somit für den gesamten Ausdruck) ermittelt (man könnte auch sagen, dass die Klammern die Einbettungsverhältnisse der Sätze kennzeichnen).
- Der höchste Junktor ist die Implikation; bei deren Vordersatz handelt es sich um den komplexen Satz $\neg ((A \vee B) \wedge \neg C)$. Der Nachsatz der Implikation ist der komplexe Ausdruck $(\neg (A \vee B) \vee C)$.
- Bei der Berechnung der komplexen Formel geht man nun so vor, dass man zunächst den „atomaren“, nicht weiter zerlegbaren Sätzen Wahrheitswerte zuweist (wenn eine Formel *n* atomare Sätze enthält, dann existieren $2^n$ Kombinationen von Wahrheitswerten). Anschließend arbeitet man die Formel von innen nach außen ab.

(61)

| A | B | C | ¬ ((A ∨ B) ∧ ¬ C) → (¬ (A ∨ B) ∨ C) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

- Wie man sieht, ist das Ergebnis stets „1“, d.h., der komplexe Satz ist für alle möglichen Wahrheitswertverteilungen an die atomaren Sätze stets wahr.
- Einen Satz, der unter keinen Umständen falsch sein kann (d.h. immer wahr ist, unabhängig von den Wahrheitswerten seiner Teilsätze) bezeichnet man auch als *logisch wahr* oder als *Tautologie*.

(62) *Aussagenlogische Wahrheit*
Ein Satz ist *aussagenlogisch wahr* gdw. sich bei sämtlichen Wahrheitswertverteilungen an die atomaren Sätze für diesen Satz der Wert *wahr* ergibt.

- Umgekehrt bezeichnet man Sätze, die stets falsch sind, als logisch falsch oder kontradiktorisch. Einfaches Beispiel: A ∧ ¬ A.
- Abgesehen von Eigenschaften, die sich auf einzelne Formeln/Sätze beziehen (logische Wahrheit/Falschheit) gibt es auch Begriffe, die das Verhältnis zwischen zwei Formeln/Sätze beschreiben. So bezeichnet man Sätze, die gleiche Wahrheitstafeln besitzen, als logisch äquivalent.
- Beispiel: Implikation.

- Wir haben die Implikation intuitiv wie folgt eingeführt:

(63) *Implikation*

Ein Satz $S_1$ impliziert einen Satz $S_2$ genau dann, wenn es nicht möglich ist, $S_1$ zu behaupten und $S_2$ zu verneinen.

- Wie kann man nun vor diesem Hintergrund eine alternative Formel für die Implikation formulieren, die nur die Junktoren ¬ und ∧ enthält?

(64) $S_1$ impliziert $S_2$, gdw. $\neg(S_1 \wedge \neg S_2)$

- FRAGE: Bedeuten „$A \rightarrow B$" und „$\neg(A \wedge \neg B)$" wirklich dasselbe? Dazu muss man die Wahrheitstafeln für die beiden Formeln vergleichen:

(65) $\neg(S_1 \wedge \neg S_2)$

| A | B | $\neg(A \wedge \neg B)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

- Tatsächlich sind die Wahrheitstafeln identisch. D.h., die beiden Formeln sind logisch äquivalent/bedeuten dasselbe.
- Der Begriff der logischen Äquivalenz kann auch auf den Begriff der logischen Wahrheit zurückgeführt werden.
- Dazu muss man sich klar machen, dass zwei Sätze A und B dann dasselbe bedeuten, wenn sie in den gleichen Situationen wahr sind. Mit anderen Worten, es muss gelten, dass $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ stets wahr ist. Dies ist –

aufgrund der Wahrheitstafel für die Konjunktion – dann der Fall, wenn sowohl (A→B) als auch (B →A) logisch wahr sind.

- Beispiel:

(66) Satz A: *Es gießt in Strömen.*
Satz B: *Es regnet.*

(67) a. Wenn es in Strömen gießt, dann regnet es. (A→B: 1)
b. Wenn es regnet, dann gießt es in Strömen. (B→A: 0)

(68) Satz A: *Es gießt in Strömen.*
Satz B': *Es schüttet wie aus Eimern.*

(69) a. Wenn es in Strömen gießt, dann schüttet es wie aus Eimern. (A→B': 1)
b. Wenn es wie aus Eimern schüttet, dann gießt es in Strömen. (B'→A: 1)

- Verkürzt lässt sich dies auch durch den Begriff des Bikonditionals fassen, das eine vereinfachte Fassung des Satzes (A→B) ∧ (B →A) ist:

(70) *Bikonditional*

| A | B | A↔B |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

- Wenden wir das Bikonditional auf zwei logisch äquivalente Formeln an, dann muss sich für alle möglichen Wahrheitswertkombinationen der Wert 1 ergeben:

(71)

| A | B | $(A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

(72) *Logische Äquivalenz und logische Wahrheit*

Zwei Formeln A und B sind (logisch) äquivalent, wenn $A \leftrightarrow B$ logisch wahr ist, oder wenn $\neg A \leftrightarrow B$ kontradiktorisch ist.

- Formeln, die sowohl eine „1“ als auch eine „0“ in ihrer Wahrheitstafel aufweisen, sind weder logisch wahr noch kontradiktorisch. Solche Formeln nennt man auch <u>konsistent</u>.
- Ob eine Formel logisch wahr, kontradiktorisch oder konsistent ist, kann man herausfinden, indem man ihre Wahrheitstafel berechnet.
- Bekannte logisch äquivalente Formeln:

(73) a. $A \rightarrow B$ gdw. $\neg B \rightarrow \neg A$ (Kontraposition)

b. $\neg(A \wedge B)$ gdw. $\neg A \vee \neg B$

c. $\neg(A \vee B)$ gdw. $\neg A \wedge \neg B$

d. $A \vee (B \wedge C)$ gdw. $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

e. $A \wedge (B \vee C)$ gdw. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

## Exkurs zum logischen Schließen

- Ein wichtiger Teilbereich der Aussagenlogik ist das logische Schließen, d.h., die Beobachtung, dass aus einer Menge von Prämissen, die wahr sind, auf die Wahrheit eines anderen Satzes geschlossen werden kann.
- Beispiel: angenommen die folgenden beiden Sätze sind wahr:

(74) a. Wenn Frankfurt in Hessen liegt, dann liegt Frankfurt in Deutschland.
b. Frankfurt liegt in Hessen.

- Dann gilt auch:

(75) Frankfurt liegt in Deutschland.

- Diese Schlussregel lässt sich wie folgt formalisieren:

(76) *Modus Ponens*
Falls
a. $A \rightarrow B$ wahr ist und
b. A wahr ist, ist auch
c. B wahr.

- Das die Regel (76) auf jeden Fall zutreffen muss, kann man mithilfe eines sog. <u>indirekten Beweises</u> zeigen.
- Strategie: man zeigt, dass aus der Annahme dass B falsch ist, obwohl $A \rightarrow B$ sowie A wahr sind, ein Widerspruch folgt. Dies lässt sich an der Wahrheitstafel für die Implikation veranschaulichen.

(77) *Implikation*

| A | B | A → B |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

- (i) Aus der Annahme, dass A→B wahr ist, folgt, dass wir Zeile 2 streichen können. (ii) Aus der Annahme, dass A wahr ist, folgt, dass wir die Zeilen 3 und 4 streichen können. (iii) Übrig bleibt Zeile 1, die aber fordert, dass B wahr ist. Mit anderen Worten, aus unserer Annahme, dass B falsch ist, folgt ein Widerspruch, wenn man sich die Wahrheitstafel für die Implikation anschaut.
- Die Schlussregel Modus Ponens lässt sich auch wiederholt anwenden. Im folgenden Beispiel umfassen die Prämissen die drei Sätze in (78). Wenn diese wahr sind, kann daraus auf die Wahrheit des Satzes in (79) geschlossen werden:

(78) a. Wenn Merkel und Sarkozy sich gut verstehen, dann werden sich die deutsch-französischen Beziehungen stark verbessern.
b. Wenn sich die deutsch-französischen Beziehungen stark verbessern, dann wird der deutsche Kanzler/die deutsche Kanzlerin das Kreuz der Ehrenlegion verliehen bekommen.
c. Merkel und Sarkozy verstehen sich gut.

(79) Angela Merkel wird das Kreuz der Ehrenlegion verliehen bekommen.

- Falls ein Satz A durch die Anwendung des Modus Ponens aus einer Menge von Sätzen Γ gefolgert wurde, dann schreibt man auch („aus Γ folgt A“):

(80) $\Gamma \vdash A$

- Die Bestandteile unserer junktorenlogischen Sprache lassen sich auch im Rahmen einer Phrasenstrukturgrammatik erfassen:

(81) a. S → Neg S
b. S → S J S
c. Neg → {¬}
d. J → {∧,∨,→,↔}
e. S → {A, B, C, ...}

- Natürlich handelt es sich hierbei nur um ein Fragment, das viele Kombinationsmöglichkeiten von Sätzen nicht erfassen kann (z.B. A *weil* B, A *obwohl* B, *es ist möglich, dass* A etc.). Dennoch erlaubt es diese „Spielzeuggrammatik“ bereits, rekursive Strukturen und mehrdeutige Sätze zu erzeugen.